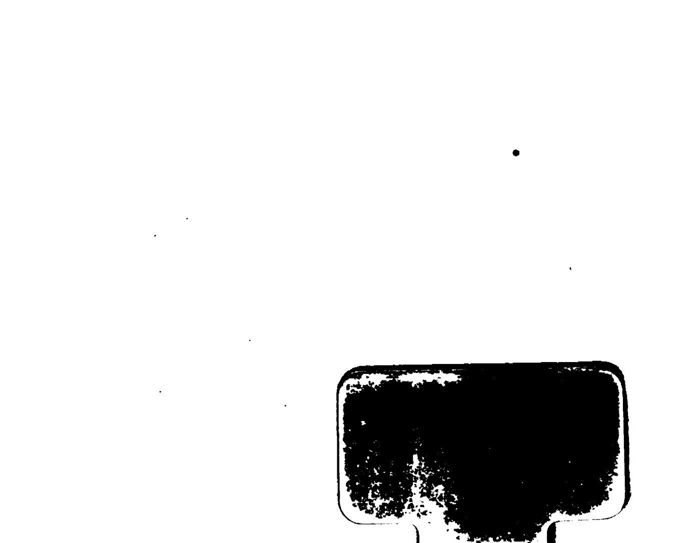

183. a.
13.





Neue Behandlung

desjenigen Theils der

Geometrie des Raums,

welcher

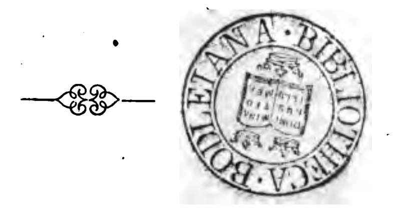
die verschiedenen Lagen gerader Linien und Ebenen betrachtet.

Von

Paul Escher.

Eingeführt von Prof. Dr. G. S. Ohm.

Mit zwei Figurentafeln.



Stuttgart.
Verlag von Ebner & Seubert.
1853.

Die Stelle eines Vorworts möge nachfolgendes Schreiben vertreten, zu dessen Veröffentlichung Herr Prof. Dr. **G. S. Ohm** die Ermächtigung ertheilt hat:

München, den 25. Juni 1853.

Lieber Freund!

Ich habe Ihre mir zugesandte „Neue Behandlung desjenigen Theils der Geometrie des Raumes, welcher die verschiedenen Lagen gerader Linien und Ebenen betrachtet" mit einem Vergnügen und mit einer Befriedigung durchgelesen, die ich beim Durchblättern von geometrischen Schriften der Neuzeit nur höchst selten zu empfinden gewohnt bin. Sie haben durch die mir vorgelegte Arbeit die Betrachtung der Lage von Geraden und Ebenen gegen einander zu einem so homogenen und vollständigen Ganzen verbunden, wie es bis auf diesen Tag bei weitem nicht der Fall war, und zugleich haben Sie diesen Gegenstand dem Verständniß junger Leute dadurch um Vieles näher gerückt, daß Sie ihn in und durch sich selber behandelten, nicht, wie es bisher noch immer der Fall war, den Raum zum Ebenwerden zwingen wollten. Nach meinem Dafürhalten werden Sie durch die Veröffentlichung Ihrer Arbeit einem lange schon gefühlten Bedürfnisse abhelfen, und ich glaube daher, Ihre Furcht vor einer möglichen Nichttheilnahme des größern Publikums an Ihrer Leistung für gänzlich übertrieben erklären zu dürfen. In unsern Zeiten, wo die descriptive Geometrie in einem großen Theile unserer Schulen eine Hauptrolle spielt, muß diese nach einem tüchtigen Fundamente, wie Sie es geben, und das dieselbe bei dem bisherigen Vortrage des von Ihnen neu behandelten Stoffes oft genug schmerzlich

zu vermissen, Anlaß fand, mit Begierde greifen, und dieser Umstand allein schon sichert Ihnen einen bedeutenden Absatz zu. Zudem darf nach dem Erscheinen Ihrer kleinen Schrift keine neu erscheinende Geometrie Ihre Bearbeitung von einem der schwierigsten Kapitel ignoriren wollen, ohne auf eine allgemeinere Brauchbarkeit Verzicht zu leisten, und dieß sichert Ihnen auch noch eine nicht unbeträchtliche Theilnahme von der Seite unserer Bildungsanstalten zu, welche den technischen gegenüber gestellt zu werden pflegt. Gehen Sie daher getrost ans Werk, und Gottes Schutz wird Sie begleiten.

Ihr

aufrichtig ergebener

Prof. Dr. G. S. Ohm.

Inhalt.

Einleitung.

§. 1.

Die ebene Fläche (Ebene) ist uns gegeben, mit der Eigenschaft begabt, daß jede gerade Linie, welche irgend zwei Punkte mit ihr gemein hat, ganz in dieselbe fällt. — Eine Gerade kann also eine Ebene in nicht mehr als Einem Punkte schneiden.

§. 2.

Lehrsatz. Wenn zwei Ebenen drei nicht in gerader Linie liegende Punkte gemein haben, so fallen sie ganz zusammen.

Beweis. Die beiden Ebenen mögen mit M und N bezeichnet sein. a, b, c (Fig. 1.) seien drei nicht in gerader Linie liegende Punkte, welche M und N gemein haben mögen.

Zieht man die Geraden ab, ac und bc, so müssen dieselben sowohl in M als in N zu liegen kommen (§. 1).

Um zu beweisen, daß ein beliebiger Punkt e der Ebene M, welcher sich innerhalb des von den Geraden ab, ac, bc begrenzten Theils der Ebene M befindet, auch in der Ebene N liegt, lege man durch c und e eine Gerade, so fällt diese ganz in die Ebene M und trifft die Gerade ab in einem Punkt d. Dieser Punkt ist beiden Ebenen gemein. Da nun die Gerade cd mit der Ebene N die Punkte c und d gemein hat, so muß sie ganz in N liegen, also muß auch der Punkt e ein Punkt von N sein.

Will man beweisen, daß ein beliebiger Punkt f der Ebene M, welcher sich außerhalb des von den Geraden ab, ac, bc be-

grenzten Theils der Ebene M befindet, auch in der Ebene N liegt, so verbinde man ihn mit e durch eine Gerade. Letztere fällt ganz in die Ebene M und muß die Grenze abc in irgend einem Punkte g überschreiten. Dieser Punkt ist beiden Ebenen gemein. Da nun die Gerade ef mit der Ebene N die Punkte e und g gemein hat, so muß sie ganz in N liegen, also muß auch der Punkt f ein Punkt von N sein. Es müssen also alle Punkte der Ebene M, sowohl die, welche innerhalb, als die, welche außerhalb des von den Geraden ab, ac und bc begrenzten Theils der Ebene M liegen, zugleich Punkte der Ebene N sein, folglich beide Ebenen ganz zusammenfallen.

§. 3.

Zusätze. I. Wenn zwei Ebenen eine Gerade und einen außer ihr gelegenen Punkt, oder zwei sich schneidende Gerade, oder zwei parallele Gerade gemein haben, so fallen sie ganz zusammen.

II. Durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte, oder durch eine Gerade und einen außerhalb ihr gelegenen Punkt, oder durch zwei sich schneidende Gerade, oder durch zwei parallele Gerade ist nur Eine Ebene denkbar.

III. Die Schnittlinie zweier sich schneidenden Ebenen muß eine gerade Linie sein und außer dieser können die beiden Ebenen keinen Punkt mehr gemein haben.

IV. Jeder zweien Ebenen gemeinsame Punkt liegt in der Schnittlinie beider Ebenen.

V. Schneidet eine außerhalb einer Ebene gelegene Gerade eine zweite in der Ebene gelegene Gerade, so schneidet sie die Ebene selbst.

VI. Schneidet eine Gerade G_1 eine Ebene E_1 in einem Punkte P, so schneidet auch jede durch die Gerade G_1 gehende Ebene E_2 die erstere Ebene, und zwar nach einer Geraden G_2, welche durch jenen Punkt P geht.

Erster Abschnitt.

Parallelismus gerader Linien und Ebenen im Raume.

§. 4.

Lehrsatz. Eine außerhalb einer Ebene E_1 gelegene Gerade G_1 lauft parallel dieser Ebene (d. h. trifft die Ebene nie, soweit man sie auch verlängern mag), wenn sie einer in der Ebene gezogenen Geraden G_2 parallel lauft.

Beweis. Die durch die parallelen Geraden G_1 und G_2 bestimmte Ebene E_2 schneidet die Ebene E_1 nach der Geraden G_2. Würde nun G_1 die Ebene E_1 schneiden, so müßte sie auch die Gerade G_2 schneiden (§. 3, VI), was gegen die Voraussetzung ist; folglich muß die Gerade G_1 parallel der Ebene E_1 sein.

§. 5.

Zusätze. I. Wenn zwei Gerade nicht in Einer Ebene liegen, so ist durch die eine von beiden immer eine Ebene denkbar, welche parallel der andern geht.

II. Durch einen außerhalb einer Ebene gelegenen Punkt kann man sich beliebig viele Gerade parallel zur Ebene gelegt denken.

§. 6.

Lehrsatz. Ist eine Gerade G_1 parallel einer Ebene E_1, so schneidet eine durch die erstere gelegte Ebene E_2, welche der E_1 nicht parallel ist, die gegebene E_1 nach einer der ursprünglichen Geraden G_1 parallelen Linie G_2.

Beweis. Wäre G_1 nicht parallel G_2, so müßte G_1, da sie mit G_2 in einer Ebene liegt, die G_2 und somit auch die Ebene E_1 nach §. 3, V schneiden, was gegen die Voraussetzung ist; folglich muß G_1 parallel G_2 sein.

§. 7.

Lehrsatz. Schneidet eine Ebene E_1 die eine G_1 von zwei parallelen Geraden G_1 und G_2, so schneidet sie auch die andere G_2.

Beweis. Sei P der Schnittpunkt der Linie G_1 und Ebene E_1. Denkt man sich die durch G_1 und G_2 bestimmte Ebene E_2, so muß diese die Ebene E_1 nach einer durch Punkt P gehenden Geraden G_3 schneiden (§. 3, VI). — Da nun G_1 und G_2 mit G_3 in einer Ebene liegen und G_1 die G_3 schneidet, so muß nach Begriffen der ebenen Geometrie die der G_1 parallele G_2 die G_3 und somit auch die Ebene E_1 schneiden (§. 3, V).

§. 8.

Zusätze. I. Geht eine Gerade G_1 parallel einer Ebene E, so muß eine durch einen Punkt P der Ebene E mit G_1 parallel gezogene Gerade G_2 ganz in die Ebene E fallen.

(Der Beweis folgt indirekt aus §. 7.)

II. Wenn von zwei parallelen Geraden G_1 und G_2, welche nicht in der Ebene E liegen, die eine G_1 parallel mit E geht, so lauft auch die andere G_2 mit E parallel.

(Folgt indirekt aus §. 7.)

§. 9.

Lehrsatz. Laufen zwei sich schneidende Gerade einer Ebene parallel, so ist die durch jene Gerade bestimmte Ebene dieser Ebene parallel, d. h. beide Ebenen können sich nie schneiden, so sehr man sie auch erweitern mag.

Beweis. Denn würde die Ebene der beiden sich schneidenden Geraden die andere Ebene schneiden, so wäre die Schnittlinie jeder der beiden sich schneidenden Linien parallel (§. 6.), was nach Begriffen der ebenen Geometrie unmöglich ist.

§. 10.

Zusätze. I. Durch eine zu einer Ebene parallele Gerade kann man sich immer eine Ebene parallel zur gegebenen Ebene denken.

II. Durch einen außerhalb einer Ebene gelegenen Punkt kann man sich immer eine zur gegebenen Ebene parallele Ebene gelegt denken.

III. Laufen zwei Ebenen E_1 und E_2 parallel, so lauft eine in der einen Ebene E_1 liegende Gerade G der andern Ebene E_2 parallel. (Folgt indirekt aus §. 3, VI).

IV. Zwei parallele Ebenen E_1 und E_2 werden von einer dritten Ebene E_3 in parallelen Linien G_1 und G_2 geschnitten. —

Denn G_1 ist parallel E_2 (§. 10, III), folglich auch parallel G_2 (§. 6).

§. 11.

Lehrsatz. Wenn zwei Winkel, die nicht in derselben Ebene liegen, parallele Schenkel haben, so sind ihre Ebenen parallel.

Beweis. Die Schenkel des einen Winkels sind der Ebene des anderen parallel (§. 4); daher ist auch die Ebene des ersten Winkels der des zweiten parallel (§. 9).

§. 12.

Zusatz. Durch zwei nicht in Einer Ebene liegende Gerade kann man sich beziehungsweise immer zwei parallele Ebenen gelegt denken.

§. 13.

Lehrsatz. Eine Gerade G_1, welche die eine E_1 von zwei parallelen Ebenen E_1 und E_2 in einem Punkte P_1 schneidet, schneidet auch die andere E_2.

Beweis. Man denke sich durch einen Punkt P_2 der Ebene E_2 und durch die Gerade G_1 eine Ebene E_3 gelegt, welche die Ebenen E_1 und E_2 nach zwei parallelen Geraden G_2 und G_3 schneiden muß, die beziehungsweise durch die Punkte P_1 und P_2 gehen (§. 3, VI und §. 10, IV). Die Gerade G_1, welche mit den Geraden G_2 und G_3 in Einer Ebene liegt und die eine G_2 von beiden im Punkte P_1 schneidet, muß nach Begriffen der ebenen Geometrie auch die andere G_3 und somit die Ebene E_3, in welcher G_3 liegt, schneiden (§. 3, V).

§. 14.

Zusätze. I. Eine Gerade, welche außerhalb jeder von zwei parallelen Ebenen liegt und der einen von beiden parallel geht, ist auch der andern parallel. (Folgt indirekt aus §. 13.)

II. Zieht man durch einen Punkt einer von zwei parallelen Ebenen mit der andern Ebene eine parallele Gerade, so fällt diese ganz in die erstere Ebene. (Folgt indirekt aus §. 13.) Demnach liegen alle durch einen Punkt außerhalb einer Ebene parallel mit ihr gezogenen Geraden, in einer zweiten zur erstern parallelen Ebene.

III. Schneidet eine mit einer Ebene parallele Gerade eine zweite Ebene, so muß auch die erste Ebene die zweite schneiden. (Folgt indirekt aus §. 13.)

§. 15.

Lehrsatz. Eine Ebene E_1, welche die eine E_2 von zwei parallelen Ebenen E_2 und E_3 (nach einer Geraden G_1) schneidet, schneidet auch die andere E_3.

Beweis. Denkt man sich in der Ebene E_1 eine Gerade G_2, welche die Gerade G_1 und somit auch die Ebene E_2 (§. 3, V) schneidet, so muß diese Gerade G_2 auch die Ebene E_3 in einem Punkte P schneiden (§. 13); folglich muß auch die Ebene E_1 die Ebene E_3 (nach einer durch P laufenden Geraden G_3) schneiden (§. 3, VI).

§. 16.

Zusätze. I. Durch einen außerhalb einer Ebene gelegenen Punkt, oder durch eine mit der Ebene parallele Gerade, kann man sich zu dieser Ebene nur Eine Parallelebene denken. (Folgt aus §. 15.)

II. Zwei Ebenen E_1 und E_2, die einer dritten E_3 parallel sind, sind selbst parallel. (Folgt aus §. 15 indirekt.)

§. 17.

Lehrsatz. Lauft eine Gerade G_1 jeder von zwei sich schneidenden Ebenen E_1 und E_2 parallel, so lauft sie deren Schnittlinie G_2 parallel.

Beweis. Wäre G_1 nicht parallel G_2, so könnte man sich durch einen beliebigen Punkt P der G_1 eine Parallellinie G_3 zu G_2 denken. Da G_3 jeder der beiden Ebenen E_1 und E_2 parallel wäre (§. 4), so wäre die durch G_1 und G_3 bestimmte Ebene jeder der beiden sich schneidenden Ebenen E_1 und E_2 parallel (§. 9), was nach §. 16, II unmöglich ist; folglich muß G_1 parallel G_2 sein.

§. 18.

Zusätze. I. Wenn zwei Gerade nicht in Einer Ebene liegen, so ist durch die eine derselben nur Eine Ebene denkbar, welche der andern parallel ist.

Denn gäbe es z. B. zwei, so wären nach §. 17 beide Gerade parallel, also in Einer Ebene liegend.

II. Liegen zwei Gerade nicht in Einer Ebene, so kann es nur Ein Paar von parallelen Ebenen geben, welche beziehungsweisedurch diese Gerade gehen.

Denn gäbe es z. B. zwei solche Paare, so würde jede der beiden Ebenen, welche durch die eine der beiden Geraden gehen, der anderen Geraden parallel sein müssen (§. 10, III), was nach §. 18, I unmöglich ist.

§. 19.

Lehrsatz. Wenn drei Ebenen E_1, E_2 und E_3 sich gegenseitig in drei Geraden durchschneiden, so laufen entweder je zwei der Schnittlinien parallel oder alle drei in Einem Punkte zusammen.

Beweis. G_3 sei die Schnittlinie von E_1 und E_2, G_2 die Schnittlinie von E_1 und E_3, G_1 die Schnittlinie von E_2 und E_3. Entweder ist nun G_3 parallel E_3 oder es schneidet G_3 die E_3 in einem Punkte P.

I. Ist aber G_3 parallel E_3, so ist auch G_3 parallel G_2 und G_1 (§. 6). Da nun G_2 parallel G_3 ist, so ist G_2 parallel E_2 (§. 4), folglich auch parallel G_1 (§. 6). In diesem Falle sind also von den drei Schnittlinien G_1, G_2 und G_3 je zwei parallel.

II. Schneidet aber die Linie G_3 die Ebene E_3 in einem Punkte P, so gehört dieser Punkt allen drei Ebenen E_1, E_2 und E_3 zugleich an; folglich gehen in diesem Falle alle drei Schnittlinien G_1, G_2 und G_3 durch diesen Punkt P (§. 3, IV).

§. 20.

Zusätze. I. Wenn sich drei Ebenen in drei Linien gegenseitig durchschneiden und zwei dieser Schnittlinien parallel sind, so lauft jede dieser beiden auch der dritten Schnittlinie parallel.

II. Durchschneiden sich gegenseitig drei Ebenen in drei Linien, von welchen zwei in einem Punkte zusammenkommen, so geht durch diesen Punkt auch die dritte Linie.

§. 21.

Lehrsatz. Wenn zwei Linien L_1, L_2 im Raume einer dritten L_3 parallel sind, so sind sie, auch für den Fall, daß sie mit L_3 nicht in einer und derselben Ebene liegen, einander selbst parallel.

Beweis. Die Geraden L_2 und L_3 liegen in einer Ebene E_1. Wäre L_1 nicht parallel L_2, so könnte man sich durch einen Punkt P der L_1 zwei Ebenen E_3 und E_2 gelegt denken, welche die Ebene E_1 nach den Geraden L_2 und L_3 und sich selbst nach einer durch Punkt P gehenden Geraden L_4 schneiden würden (§. 3, IV), die, weil L_2 parallel L_3, nach §. 20, I parallel L_3 sein müßte. Es gäbe also durch den Punkt P zwei mit L_3 parallele Gerade L_1 und L_4, was unmöglich ist. Folglich muß L_1 parallel L_2 sein.

§. 22.

Lehrsatz. Lauft eine Gerade einer Ebene parallel, so sind parallele Gerade, welche von Punkten der ursprünglichen Geraden ausgehen und von der Ebene anderseits begrenzt werden, einander gleich.

Der Beweis folgt aus §. 6 in Verbindung mit dem Satze, daß in jedem Parallelogramme die Gegenseiten einander gleich sind.

§. 23.

Lehrsatz. Parallele Gerade zwischen zwei parallelen Ebenen sind einander gleich.

Beweis. Denn je zwei dieser parallelen Geraden befinden sich zugleich zwischen einer Ebene und einer ihr parallelen Geraden (§. 10, III), sind also nach §. 22 gleich.

§. 24.

Lehrsatz. Laufen mehrere Gerade (Fig. 2) LA, LB ꝛc. von einem Punkte L aus, so werden sie von zwei parallelen Ebenen EFGH und JKSM in proportionirte Stücke LA und LC, LB und LD geschnitten, d. h. es verhält sich $LC : LA = LD : LB$.

Beweis. Denkt man sich die durch LA und LB bestimmte Ebene, so schneidet diese die Ebenen EFGH und JKSM nach zwei parallelen Geraden AB und CD (§. 10, IV); folglich verhält sich $LC : LA = LD : LB$.

§. 25.

Lehrsatz. Zwei nicht in Einer Ebene liegende Gerade AC und FD (Fig. 3) werden von drei parallelen Ebenen in proportionirte Stücke AB und BC, DE und EF geschnitten, d. h. es verhält sich $AB : BC = DE : EF$.

Beweis. Zieht man die Gerade AF, welche die mittlere Ebene im Punkte G schneidet, so verhält sich nach §. 24:

$$AB : BC = AG : GF \text{ und}$$
$$\underline{AG : GF = DE : EF}$$
$$AB : BC = DE : EF.$$

Zweiter Abschnitt.

Von den Flächenwinkeln. — Senkrechte und schiefe Lage zweier Ebenen.

§. 26.

Erklärung. Wenn sich zwei Ebenen gegenseitig durchschneiden, so theilen sie den unendlichen Raum in vier Theile, welche (hohle) Flächenwinkel heißen. Die (gerade) Schnittlinie beider Ebenen bildet die Scheitellinie für jeden der vier Flächenwinkel. Je zwei dieser vier Flächenwinkel werden Nebenwinkel oder Scheitelwinkel zueinander genannt, je nachdem sie nebeneinander liegen oder blos die Scheitellinie gemein haben.

Diejenigen zwei Theile von Ebenen, welche einen Flächenwinkel begrenzen, führen den Namen: „Schenkelebenen des Flächenwinkels.“ Jeden Flächenwinkel kann man sich mittelst durch seine Scheitellinie gehende Ebenen in Theile zerlegt denken, welche selbst wiederum Flächenwinkel bilden.

§. 27.

Erklärung. Werden zwei Flächenwinkel so aufeinandergelegt, daß sie eine gemeinschaftliche Scheitellinie und Schenkelebene haben, so sind sie gleich, wenn auch ihre beiden andern Schenkelebenen in Eine zusammenfallen, ungleich, wenn Letzteres nicht geschieht. Von den ungleichen Winkeln ist derjenige der kleinere, der sich nach solchem Aufeinanderlegen einem Theil des andern gleich zeigt — der andere ist der größere.

§. 28.

Aus dieser Definition ergeben sich sogleich folgende Sätze:

I. Zwei Flächenwinkel A und B, die einem dritten C gleich sind, sind einander selbst gleich.

Denn legt man zunächst A und dann B so auf C, daß jeder der beiden ersten den C vollkommen deckt, was nach §. 27 möglich ist, so deckt in dieser Lage zugleich A den B vollständig. Also ist A gleich B (§. 27).

II. Ist von zwei gleichen Flächenwinkeln A und B der eine A größer als ein dritter Winkel C, so ist auch der andere B größer als dieser dritte Winkel C.

Denn legt man zunächst B auf A so, daß er den A vollständig deckt, dann C auf A so, daß er mit A, also auch mit B die Scheitellinie und eine Schenkelebene gemein hat, so muß nach §. 27 die zweite Schenkelebene von C zwischen die Schenkelebenen von A, also auch zwischen die Schenkelebenen von B fallen, somit B auch größer als C sein (§. 27).

III. Ist von zwei gleichen Flächenwinkeln A und B der eine A kleiner als ein dritter C, so ist auch der andere B kleiner als dieser dritte Winkel C.

Denn legt man zunächst A auf C so, daß er mit C die Scheitellinie und eine Schenkelebene gemein hat, so muß die zweite Schenkelebene von A zwischen die Schenkelebenen von C fallen (§. 27). Legt man jetzt B auf den ihm gleichen A so, daß er den A vollständig deckt, was nach §. 27 möglich ist, so hat B in dieser Lage mit C die Scheitellinie und eine Schenkelebene gemein, während die zweite Schenkelebene von B zwischen die Schenkelebenen von C fällt. Folglich ist auch B kleiner als C (§. 27).

IV. Ist ein Flächenwinkel A größer als ein zweiter B, der zweite B wiederum größer als ein dritter C, so ist auch der erste A größer als der dritte C.

Denn legt man zunächst B so auf A, daß er mit A die Scheitellinie und eine Schenkelebene gemein hat, so wird die zweite Schenkelebene von B zwischen die Schenkelebenen des A fallen (§. 27). — Legt man jetzt C so auf B, daß er mit B und auch mit A die Scheitellinie und eine Schenkelebene gemein hat, so muß die zweite Schenkelebene von C zwischen die Schenkelebenen von B (§. 27) und somit auch zwischen die Schenkelebenen von A fallen; folglich ist auch A größer als C (§. 27).

§. 29.

Erklärungen. I. Sind zwei Flächennebenwinkel einander gleich, so heißt jeder ein rechter Winkel (Rechter). Von der gemeinschaftlichen Schenkelebene beider Nebenwinkel sagt man dann, sie stehe senkrecht auf der Ebene der beiden anderen Schenkelebenen.

II. Sind aber zwei Flächennebenwinkel ungleich, so heißen sie im Allgemeinen schiefe Winkel; der größere von beiden wird stumpf, der kleinere spitz genannt. Von der gemeinschaftlichen Schenkelebene beider Nebenwinkel sagt man in diesem Falle, sie stehe schief auf der Ebene der beiden anderen Schenkelebenen.

§. 30.

Lehrsatz. Nebenwinkel gleicher Flächenwinkel sind gleich.

Beweis. (Fig. 4). Das eine Nebenwinkelpaar bestehe aus den Winkeln ABC und CBD *), das andere aus den Winkeln EFG und GFH. Außerdem sei Winkel ABC gleich Winkel EFG, so muß auch Winkel CBD gleich Winkel GFH sein. Denn denkt man sich das eine Nebenwinkelpaar EFGH so auf das andere ABCD gelegt, daß Scheitellinie F auf Scheitellinie B und Ebene EFH auf Ebene ABD zu liegen kommt, so muß auch Schenkelebene FG auf Schenkelebene BC zu liegen kommen (Fig. 27), weil Winkel EFG gleich Winkel ABC ist; folglich muß Winkel GFH den Winkel CBD vollständig decken, also ihm gleich sein (§. 27).

§. 31.

Zusätze. I. Ist ein Flächenwinkel irgend einem Rechten gleich, so ist er selbst ein Rechter.

Denn sind A und B zwei Nebenwinkel und ist A gleich B oder mit anderen Worten A ein Rechter; sind ferner C und D zwei Nebenwinkel und C gleich A, so muß auch C gleich D oder mit andern Worten C ein Rechter sein.

---

*) Die Bezeichnung der Flächenwinkel ist analog der der ebenen Winkel.

$C = A$ (Vorauss.). Da D Nebenwinkel von C und B Nebenwinkel von A ist, so folgt hieraus:

$\overline{D = B}$ (§. 30)
$\underline{A = B}$ (Vorauss.)
$A = D$ (§. 28, I)
$\underline{C = A}$ (Vorauss.)
$C = D$ (§. 28, I)

II. Ist ein Flächenwinkel irgend einem Stumpfen oder irgend einem Spitzen gleich, so ist er beziehungsweise selbst ein Stumpfer oder Spitzer.

Der Beweis wird ähnlich dem des vorigen Zusatzes geführt, indem man sich dabei eben so streng an die Definition des Stumpfen oder Spitzen hält, wie beim Beweis des vorhergehenden Zusatzes an die Definition des Rechten.

III. Steht eine Ebene senkrecht auf einer zweiten, so ist auch ihre Erweiterung senkrecht auf der zweiten Ebene.

Sind z. B. (Fig. 5) die Flächennebenwinkel ABC und CBD einander gleich oder, mit andern Worten, ist die Schenkelebene CB senkrecht auf der Ebene ABD, so muß auch die Erweiterung BE von CB senkrecht auf Ebene ABD sein, d. h. die Flächennebenwinkel ABE und DBE müssen auch einander gleich sein. Letzteres ist nun aber der Fall, weil die Flächenwinkel ABE und DBE beziehungsweise Nebenwinkel der gleichen Winkel ABC und CBD bilden und Nebenwinkel gleicher Flächenwinkel gleich sind (§. 30).

Man gebraucht deßhalb den Ausdruck: „Eine Ebene *schneidet* eine andere senkrecht.“

§. 32.

Lehrsatz. Scheitelflächenwinkel sind gleich.

Beweis. Sie bilden Nebenwinkel eines und desselben Flächenwinkels, sind also nach §. 30 einander gleich.

§. 33.

Zusätze. I. Ein rechter Flächenwinkel ist *jedem* seiner beiden Nebenwinkel gleich (§. 28, I).

II. Ein stumpfer Flächenwinkel ist größer als *jeder* seiner beiden Nebenwinkel (§. 28, III).

III. Ein spitzer Flächenwinkel ist kleiner als *jeder* seiner beiden Nebenwinkel (§. 28, II).

IV. Steht eine Ebene senkrecht auf einer zweiten, so ist die zweite auch senkrecht zur ersten (§. 29, I und §. 33, I).

Man sagt deßhalb oft: „Zwei Ebenen stehen senkrecht aufeinander."

V. Steht eine Ebene schief auf einer zweiten, so steht auch ihre Erweiterung schief auf der zweiten.

Sind z. B. (Fig. 6) die Flächenwinkel ABC und CBD ungleich, (ABC > CBD) oder mit andern Worten ist Schenkelebene BC schief auf Ebene ABD, so muß auch die Erweiterung BE von BC schief auf ABD stehen, d. h. DBE und ABE müssen ungleich sein (DBE > ABE).

Winkel	ABC >	Winkel	CBD	(Vorauss.)
„	ABC =	„	DBE	(§. 32)
„	DBE >	„	CBD	(§. 28, II)
„	CBD =	„	ABE	(§. 32)
„	DBE >	„	ABE	(§. 28, III)

Man spricht daher manchmal: „Eine Ebene *schneidet* eine andere schief."

VI. Steht eine Ebene schief auf einer andern, so steht auch die zweite schief auf der ersten. (§. 29, II und §. 33, II oder III)

Dieser Wahrheit ist der Ausdruck zuzuschreiben: „Zwei Ebenen stehen schief aufeinander."

§. 34.

Lehrsatz. Nebenwinkel ungleicher Flächenwinkel sind ungleich, und zwar ist ein Nebenwinkel des größern Winkels immer kleiner als ein Nebenwinkel des kleinern Winkels.

Beweis. (Fig. 7). Das eine Nebenwinkelpaar bestehe aus den Winkeln ABC und CBD, das andere aus den Winkeln EFG und GFH. Außerdem sei Winkel ABC größer als Winkel EFG so muß Winkel CBD kleiner als Winkel GFH sein.

Denn denkt man sich das Winkelpaar EFGH so auf das Winkelpaar ABCD gelegt, daß Scheitellinie F auf Scheitellinie B und Ebene EFH auf Ebene ABD fällt, so muß Schenkelebene FG zwischen die Schenkelebenen AB und BC des Winkels ABC zu liegen kommen (§. 27), folglich BC zwischen die Schenkelebenen FG und FH, daher muß Winkel CBD kleiner als Winkel GFH sein (§. 27).

§. 35.

Zusätze. I. Ist ein (hohler) Flächenwinkel größer als irgend ein Rechter, so ist er stumpf.

Bilden a und b zwei gleiche Flächennebenwinkel oder rechte Flächenwinkel; sind ferner c und d ebenfalls Flächennebenwinkel und ist $c > a$, so muß c ein stumpfer Winkel, d. h. größer als d sein.

$c > a$ (Voraussetzung)
$d < b$ (§. 34)
oder $b > d$
$a = b$ (Voraussetzung)
$a > d$ (§. 28 II)
$c > a$ (Voraussetzung)
$c > d$ (§. 28, IV).

II. Ist ein Flächenwinkel kleiner als irgend ein Rechter, so ist er spitz.

Der **Beweis** ist dem des vorigen Zusatzes ähnlich.

III. Alle rechte Flächenwinkel sind einander gleich. (Folgt indirekt aus §. 35, I und II.)

IV. Durch eine Gerade einer Ebene läßt sich zur Ebene nur **Eine** senkrechte Ebene legen. (Folgt aus dem vorigen Zusatze.)

V. Ein stumpfer Flächenwinkel ist immer größer als ein Rechter.

Der Beweis ist indirekt nach §. 31, I und §. 35, II zu führen.

VI. Ein spitzer Flächenwinkel ist immer kleiner als ein Rechter.

Der Beweis ist indirekt nach §. 31, I und §. 35, I zu führen.

VII. Irgend ein stumpfer Flächenwinkel ist immer größer als irgend ein spitzer Flächenwinkel.

Der Beweis folgt aus den beiden vorhergehenden Zusätzen in Verbindung mit §. 28, IV.

Dritter Abschnitt.

Von den Dreikanten. — Kongruenz und Symmetrie derselben.

§. 36.

Erklärungen. I. Schneidet eine Ebene die Scheitellinie eines (hohlen) Flächenwinkels in einem Punkte, so theilt sie denselben in zwei Theile, welche Dreikante heißen. Die drei ein Dreikant einschließenden Ebenen schneiden sich nach drei Geraden, welche die Kanten des Dreikants heißen und in Einen Punkt zusammenlaufen (§. 19), der der Scheitel oder die Spitze des Dreikants genannt wird. — Die drei das Dreikant begrenzenden Ebenen, welche wiederum von den Kanten des Dreikants zu ebenen Winkeln begrenzt werden, führen den Namen: „Seiten des Dreikants.“ Die drei (hohlen) Flächenwinkel, welche die drei Seiten des Dreikants miteinander bilden, heißen die Flächenwinkel des Dreikants. — In einem Dreikante ist jede der drei Seiten immer kleiner als 180° oder zwei Rechte.

II. Zwei Dreikante heißen kongruent, wenn sie in eine solche gegenseitige Lage gebracht werden können, daß alle Theile des

einen zugleich Theile des andern sind und umgekehrt (man sagt: „wenn sie sich decken“).

In kongruenten Dreikanten sind die Seiten und Winkel einzeln verglichen gleich.

III. Werden die Seiten eines beliebigen Dreikants erweitert, so entsteht unter sieben neuen Dreikanten eines, dessen drei Kanten die Verlängerungen der Kanten des ursprünglichen Dreikants bilden. Dieses neu entstandene Dreikant heißt das Scheitelkant des ursprünglichen. Seine drei Flächenwinkel sind denen des ursprünglichen und seine drei Seiten denen des ursprünglichen beziehungsweise als Scheitelwinkel gleich; aber diese Stücke folgen beim Scheitelkante in anderem Sinne aufeinander, als die ihnen gleichen im alten Dreikante. — Es ist klar, daß auch das alte Dreikant Scheitelkant des neuen genannt werden kann.

IV. Zwei Dreikante heißen symmetrisch zueinander, wenn das eine dem Scheitelkante des andern kongruent ist. In zwei symmetrischen Dreikanten sind, wie in zwei kongruenten, die Seiten und Winkel des einen denen des andern gleich. Auch liegen in zwei symmetrischen, wie in zwei kongruenten Dreikanten, immer gleichen Seiten gleiche Winkel und gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber; nur folgen sich in den symmetrischen Dreikanten die einzelnen Bestimmungsstücke in entgegengesetztem Sinne.

§. 37.

Lehrsatz. In jedem Dreikante sind zwei Seiten zusammen immer größer als die dritte.

Beweis. I. Sind zwei Seiten eines Dreikants zusammen nicht kleiner als 180°, so ist ihre Summe größer als die dritte Seite, da letztere immerhin kleiner als 180° ist.

II. Ist aber z. B. im Dreikante ABCD (Fig. 8) Seite BAC + BAD kleiner als 180°, so denke man sich die Ebene der Seite BAD über AB hinaus erweitert und in dieser Erweiterung durch Punkt A eine Linie AE gelegt, welche mit AB einen der Seite BAC gleichen Winkel BAE macht. Verbindet man zwei

beliebige Punkte F und G der Linien AE und AD durch eine Gerade, welche die Linie AB in einem Punkte J schneiden muß, schneidet von A aus auf AC ein Stück AH gleich AF ab und zieht die Geraden JH und HG, so sind die Dreiecke AJH und AJF kongruent, woraus JH gleich FJ folgt.

Da nun

$$FG = FJ + JG = JH + JG > GH$$

ist und außerdem in den Dreiecken FAG und HAG

$$FA = HA \text{ und}$$
$$AG = AG \text{ ist,}$$

so folgt daraus unter Betrachtung der Dreiecke FAG und HAG, daß Seite

$$JAH + JAG \; (= FAJ + JAG = FAG) > HAG$$

oder Seite BAC + BAD > CAD ist.

§. 38.

Lehrsatz. In jedem Dreikante sind die drei Seiten zusammen kleiner als 360°.

Beweis. Wählt man z. B. auf den drei Kanten AB, AC, AD des beliebigen Dreikants ABCD (Fig. 9) die Punkte E, F, G, denkt sich durch diese Punkte eine Ebene gelegt, welche die Seiten CAD, BAD, BAC des gegebenen Dreikants nach den Geraden FG, EG, EF schneidet, so entstehen an den Punkten E, F, G drei neue Dreikante EAFG, FGEA, GAEF, in welchen nach §. 37 zwischen ihren Seiten folgende Relationen bestehen:

$$AEG + AEF > FEG$$
$$AFE + AFG > EFG$$
$$\underline{AGF + AGE > EGF}$$
$$AEG + AEF + AFE + AFG + AGF + AGE > FEG + EFG + EGF > 180^0.$$

Da nun in den drei Dreiecken AEF, AGF und AEG die Summe ihrer neun Winkel

$$\left.\begin{array}{r} AEG + AEF + AFE + AFG + AGF + AGE \\ + EAF + FAG + EAG \end{array}\right\} = 540^0 \text{ ist,}$$

so ist
$$EAF + FAG + EAG < 360^0$$
oder
$$BAC + CAD + BAD < 360^0.$$

§. 39.

Lehrsatz. Wenn in zwei Dreikanten zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel beziehungsweise einander gleich sind, so sind die Dreikante kongruent oder symmetrisch, je nachdem außerdem noch die gleichen Stücke in beiden Dreikanten in demselben Sinne aufeinanderfolgen oder nicht.

Beweis. I. In den beliebigen Dreikanten ABCD und EFGH (Fig. 10) sei Seite BAC gleich Seite FEG, Seite BAD gleich Seite FEH und Winkel CBD gleich Winkel GFH. Außerdem sollen diese gleichen Stücke in beiden Dreikanten in demselben Sinne aufeinanderfolgen.

Legt man Dreikant EFGH so auf Dreikant ABCD, daß Scheitel E auf Scheitel A, Kante EF auf Kante AB und Seite FEH auf die ihr gleiche BAD zu liegen kommt, so muß Kante EH auf Kante AD fallen und Seite GEF entweit der Seite CAB zu liegen kommen (§. 27). Da ferner Seite FEG gleich Seite BAC ist, so muß Kante EG anf Kante AC fallen. Die beiden Ebenen GEH und CAD haben nun zwei sich schneidende Gerade AC und AD gemein; folglich muß Seite GEH die Seite CAD decken, da durch zwei sich schneidende Gerade nur Eine Ebene denkbar ist (§. 3, II). Das Dreikant EFGH deckt daher das Dreikant ABCD vollständig; also sind die Dreikante ABCD und EFGH kongruent.

II. Haben zwei Dreikante zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich, folgen aber diese gleichen Stücke in beiden Dreikanten in entgegengesetztem Sinne aufeinander, so kann man mittelst der Definition des Scheitelkants zeigen, daß das eine Dreikant und das Scheitelkant des andern zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel einzeln gleich haben und daß diese gleichen

Stücke in beiden letzteren im nämlichen Sinne aufeinanderfolgen, daß also das eine gegebene Dreikant dem Scheitelkante des andern nach §. 39, I kongruent ist, d. h. daß beide gegebene Dreikante symmetrisch sind. (§. 36, IV.)

§. 40.

Lehrsatz. Wenn in zwei Dreikanten eine Seite und zwei anliegende Winkel beziehungsweise gleich sind, so sind die Dreikante kongruent oder symmetrisch, je nachdem ꝛc.

Beweis. I. In den beliebigen Dreikanten ABCD und EFGH (Fig. 10) sei Seite BAD gleich Seite FEH, Winkel CBD gleich Winkel GFH und Winkel CDB gleich Winkel GHF.

Außerdem sollen in beiden Dreikanten diese gleichen Stücke in demselben Sinne aufeinanderfolgen.

Man lege Dreikant EFGH so auf Dreikant ABCD, daß Scheitel E auf Scheitel A, Kante EF auf Kante AB und Seite FEH entweit der Seite BAD zu liegen kommt, so muß Kante EH auf Kante AD fallen, weil Seite FEH gleich Seite BAD ist. Ferner muß, da Winkel GFH gleich Winkel CBD und Winkel GHF gleich Winkel CDB ist, Seite FEG entweit der Seite BAC und Seite HEG entweit der Seite DAC zu liegen kommen. Kante EG liegt nun sowohl auf Ebene BAC als auf Ebene DAC, folglich im Schnitt AC beider Ebenen. Das Dreikant EFGH deckt somit das Dreikant ABCD vollständig. Folglich sind die Dreikante ABCD und EFGH kongruent.

II. Haben zwei Dreikante eine Seite und zwei anliegende Winkel einzeln gleich, folgen aber diese gleichen Stücke in beiden Dreikanten in entgegengesetztem Sinne aufeinander, so läßt sich wie in §. 39, II beweisen, daß das eine Dreikant dem Scheitelkante des andern kongruent ist, daß also beide gegebene Dreikante symmetrisch sind.

§. 41.

Lehrsatz. In jedem Dreikante, in welchem zwei Winkel einander gleich sind, liegen den gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber.

Beweis. Sei in dem Dreikante ABCD (Fig. 11), welches das Dreikant AEFG zum Scheitelkante hat, Winkel CBD gleich Winkel CDB, so muß auch Seite CAD gleich Seite CAB sein. Denn, da in den Dreikanten ABCD und AEFG

Seite BAD gleich Seite EAG,

Winkel CBD (gleich Winkel CDB) gleich Winkel FGE (§. 32) und Winkel CDB (gleich Winkel CBD) gleich Winkel FEG (§. 32) ist, so sind die Dreikante ABCD und AEFG kongruent (§. 40). Aus dieser Kongruenz folgt, daß

Seite CAB (gleich Seite FAG) gleich Seite CAD ist.

§. 42.

Lehrsatz. In jedem Dreikante, in welchem zwei Seiten einander gleich sind, liegen den gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber.

Beweis. Sei in dem Dreikante ABCD (Fig. 11), welches das Dreikant AEFG zum Scheitelkant hat, Seite CAB gleich Seite CAD, so muß auch Winkel CDB gleich Winkel CBD sein.

Denn, da in den Dreikanten ABCD und AEFG
Seite CAB (gleich Seite CAD) gleich Seite FAG
Seite CAD (gleich Seite CAB) gleich Seite FAE und
Winkel BCD gleich Winkel EFG als Scheitelwinkel ist,
so müssen die Dreikante nach §. 39 kongruent sein.

Aus dieser Kongruenz folgt, daß
Winkel CBD (gleich Winkel FGE) gleich Winkel CDB (§. 32) ist.

§. 43.

Zusätze. I. Ein Dreikant, in welchem zwei Seiten und mit denselben die ihnen gegenüberliegenden Winkel gleich sind, heißt gleichschenklig.

II. Jedes gleichschenklige Dreikant ist seinem Scheitelkante kongruent.

§. 44.

Lehrsatz. Wenn in einem Dreikante zwei Winkel ungleich sind, so sind es auch ihre Gegenseiten, und zwar hat der größere Winkel auch die größere Gegenseite.

Beweis. Sei in dem Dreikante ABED (Fig. 12) Flächen-Winkel BED größer als Flächen-Winkel BDE, so muß auch Seite BAD größer als Seite BAE sein.

Denn denkt man sich durch Kante AE eine Ebene CAE gelegt, welche, indem sie den Flächen-Winkel BED in zwei Theile theilt, mit der Seite DAE einen dem Flächen-Winkel BDE gleichen Winkel CED macht und die Seite BAD nach einer Geraden AC schneidet, so muß Seite CAD gleich Seite CAE sein (§. 41). Da nun

$$\text{Seite } BAC + CAE > BAE \text{ (§. 37)},$$

$$\text{so ist } BAD = BAC + CAD$$

$$= BAC + CAE$$

$$> BAE.$$

§. 45.

Lehrsatz. Wenn in einem Dreikante zwei Seiten ungleich sind, so sind auch ihre Gegenwinkel ungleich, und zwar hat die größere Seite auch den größern Gegenwinkel.

(Folgt indirekt aus den §§. 41. und 44.)

§. 46.

Lehrsatz. Wenn in zwei Dreikanten zwei Seiten und der Gegenwinkel der einen dieser Seiten beziehlich einander gleich sind, aber von den Gegenwinkeln, welche der andern gleichen Seite in beiden Dreikanten gegenüber liegen, der eine nicht gleich dem Nebenwinkel des andern ist, so sind beide Dreikante kongruent oder symmetrisch, je nachdem rc. rc.

Beweis. Sei in den Dreikanten ABCD und KLMN (Fig. 13) Seite BAD gleich Seite LKN, Seite BAC gleich Seite LKM und Winkel BCD gleich Winkel LMN. Außerdem sei noch der Winkel BDC ungleich dem Nebenwinkel von LNM,

so müssen die Dreikante ABCD und KLMN kongruent oder symmetrisch sein.

Wären die dritten Seiten CAD und MKN in beiden Dreikanten ungleich, so müßte die eine, z. B. CAD, größer sein als die andere (MKN). In diesem Falle könnte man durch Scheitel A in der Seite CAD eine Gerade AE ziehen, welche mit AC einen der Seite MKN gleichen (ebenen) Winkel BAE macht, und durch AB und AE eine Ebene gelegt denken. Die Dreikante ABCE und KLMN hätten dann zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich, wären also kongruent oder symmetrisch (§. 39). Aus diesem würde folgen, daß Winkel BEC gleich Winkel LNM und Seite BAE gleich Seite LKN wäre. Da nun der Voraussetzung gemäß Seite LKN gleich Seite BAD ist, so wäre auch Seite BAE gleich Seite BAD, daher Winkel BDE oder BDC gleich Winkel BED (§. 42), d. h. gleich dem Nebenwinkel des Winkels BEC und somit auch gleich dem Nebenwinkel des Winkels LNM (§§. 30 und 28, I.), was der Voraussetzung widerspricht. Also können auch nicht, wie wir angenommen haben, die Seiten CAD und MKN ungleich sein.

Wir finden somit, daß unter den im Lehrsatze aufgestellten Bedingungen zwei Dreikante immer zugleich zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel einzeln gleich haben, folglich kongruent oder symmetrisch sein müssen, je nachdem 2c. 2c. (§ 39).

§. 47.

Lehrsatz. Wenn in zwei Dreikanten zwei Seiten des einen, zweien des andern gleich sind, der von diesen Seiten des einen Dreikants eingeschlossene Winkel größer ist, als der entsprechend im andern Dreikante gelegene, so ist auch die dritte Seite im ersten Dreikante größer, als die dritte Seite im zweiten.

Beweis. I. Sei in den Dreikanten ABCD und EFGH (Fig. 14) Seite BAC gleich Seite FEG, Seite CAD gleich Seite GEH, Flächenwinkel BCD aber größer als Flächenwinkel FGH. Außerdem sollen in beiden Dreikanten die gleichen Stücke in demselben Sinne auf einander folgen, so muß Seite BAD größer als Seite FEH sein.

Legt man Dreikant EFGH so auf Dreikant ABCD, daß Scheitel E auf Scheitel A, Kante EG auf Kante AC und Seite GEH entweit der Seite CAD zu liegen kommt, so muß Kante EH auf Kante AD fallen, weil Seite GEH gleich Seite CAD ist. Ferner muß Seite FEG zwischen die Seiten BAC und CAD des Winkels BCD fallen (§. 27), weil Flächenwinkel FGH kleiner als Flächenwinkel BCD ist. Die Kante EF wird endlich innerhalb des Dreikants ABCD (Fig. 15), oder auf Seite BAD (Fig. 16), oder außerhalb des Dreikants ABCD (Fig. 17) fallen, je nachdem Flächenwinkel FHG kleiner, gleich oder größer als Flächenwinkel BDC ist (§. 27).

1) Im ersten Falle, wo die neue Lage der EF (Fig. 15) sich in AX befindet, denke man sich Seite XAC erweitert, bis sie die Seite BAD nach einer Geraden AL schneidet, so ist Seite

$$\left.\begin{array}{l} BAC + LAB > CAL \\ LAD + LAX > XAD \end{array}\right\} \text{(§. 37.)}$$

$$BAC + LAB + LAD + LAX > CAL + XAD$$

oder $BAC + BAD + LAX > LAX + XAC + XAD$

$$BAC + BAD > XAC + XAD.$$

Da aber BAC gleich FEG oder gleich XAC ist, so folgt

$$BAD > XAD \text{ oder}$$
$$BAD > FEH.$$

2) Im zweiten Falle, wo AW (Fig. 16) die neue Lage der EF vorstellt, findet man unmittelbar, daß BAD größer als WAD oder größer als FEH ist.

3) Im dritten Falle, wo AV (Fig. 17) die neue Lage von EF repräsentirt und die Seite VAC die Seite BAD nach der Geraden AM schneidet, ist Seite

$$\left.\begin{array}{l} DAM + MAV > VAD \\ MAC + MAB > BAC \end{array}\right\} \text{(§. 37.)}$$

$$DAM + MAV + MAC + MAB > VAD + BAC$$

oder $BAD + VAC > VAD + BAC$

Da aber VAC (gleich FEG) gleich BAC ist, so folgt

$$BAD > VAD \text{ oder}$$
$$BAD > FEH.$$

II. Folgen die gleichen Stücke in beiden Dreikanten in entgegengesetztem Sinne auf einander, so vergleicht man das eine Dreikant mit dem Scheitelkante des andern und findet nach dem ersten Theile des Beweises, daß der Satz auch in diesem Falle richtig bleibt.

§. 48.

Lehrsatz. Wenn in zwei Dreikanten zwei Seiten des einen einzeln zweien Seiten des andern gleich sind, die dritte Seite im ersten Dreikante aber größer ist, als die dritte im zweiten, so hat die dritte Seite im ersten Dreikante einen größern Gegenwinkel, als die im zweiten.

Der Beweis wird indirekt mittelst der §§. 39 und 47 geführt.

§. 49.

Lehrsatz. Wenn in zwei Dreikanten die drei Seiten einzeln verglichen gleich sind, so sind beide Dreikante kongruent oder symmetrisch, je nachdem ꝛc. ꝛc.

Es wird indirekt mittelst §. 47 bewiesen, daß die beiden Dreikante zwei Winkel gleich haben, woraus sich dann das Uebrige aus §. 39 ergibt.

Vierter Abschnitt.

Von der senkrechten Lage einer Linie und Ebene.

§. 50.

Lehrsatz. Stehen zwei Ebenen senkrecht auf einander und ist eine in der einen Ebene gezogene Gerade auf der Durchschnittslinie beider senkrecht, so ist sie senkrecht auf allen durch ihren Fußpunkt in der zweiten Ebene gezogenen Geraden.

Beweis. Die Ebenen ABCD und GHJK (Fig. 18), welche sich nach der Linie HJ schneiden, seien senkrecht aufeinander, die Linie FE der Ebene GHJK stehe senkrecht zur Linie HJ, so ist noch zu beweisen, daß FE auf einer beliebigen, durch ihren Fußpunkt E in der Ebene ABCD gezogenen Geraden z. B. auf MN senkrecht steht.

Denkt man sich zu diesem Zwecke durch FE und MN eine Ebene gelegt, so entstehen die Dreikante EFNJ und EFMH, in welchen

Seite FEJ gleich Seite FEH
Seite NEJ gleich Seite MEH und
Winkel FJN gleich Winkel FHM (§. 29, I) ist.

Diese Dreikante sind nach §. 39 kongruent. Aus der Kongruenz folgt, daß Seite FEN gleich Seite FEM oder daß FE senkrecht zu MN ist.

§. 51.

Erklärungen. I. Steht eine Gerade senkrecht auf allen durch ihren Schnittpunkt mit einer Ebene in dieser gezogenen Geraden, so sagt man, sie stehe senkrecht auf der Ebene.

II. Eine Gerade, welche schief auf Einer durch ihren Schnittpunkt mit einer Ebene in dieser gezogenen Geraden steht, steht schief auf der Ebene.

§. 52.

Lehrsatz. Eine Gerade, welche eine Ebene trifft und auf zweien durch ihren Fußpunkt in der Ebene gezogenen Geraden senkrecht steht, ist senkrecht zu jener Ebene.

Beweis. Es stehe z. B. die Gerade EF (Fig. 18), welche die Ebene ABCD in E treffe, auf den durch E in der Ebene ABCD beliebig gezogenen Geraden HJ und MN senkrecht.

Denkt man sich nun die zwei Ebenen durch EF gelegt, welche die Ebene ABCD nach den Geraden HJ und MN schneiden, so erhält man die nach §. 49 kongruenten Dreikante EFHM und EFJN. In denselben ist Winkel FHM gleich Winkel FJN. Somit steht die Ebene GHJK senkrecht auf der Ebene ABCD

(§. 29, I), woraus folgt, daß auch die Gerade EF senkrecht zu ABCD ist (§. 50).

§. 53.

Zusatz. Eine zu einer Ebene schiefe Gerade kann höchstens auf Einer der Geraden senkrecht stehen, welche durch ihren Fußpunkt in der Ebene gezogen werden können.

§. 54.

Lehrsatz. Wenn eine in einer Ebene gezogene Gerade senkrecht auf einer andern Ebene steht, so steht auch die erstere Ebene auf der andern senkrecht.

Beweis. Die Gerade EF der Ebene GHJK (Fig. 18) stehe senkrecht auf Ebene ABCD, so muß auch Ebene GHJK senkrecht auf Ebene ABCD sein.

Denn denkt man sich durch EF noch irgend eine zweite Ebene LMNP gelegt, welche die Ebene ABCD nach einer Geraden MN schneidet, so sind die Dreikante EFHM und EFJN kongruent (§. 49); folglich ist Winkel FHM gleich Winkel FJN, oder Ebene GHJK senkrecht auf ABCD (§. 29, I).

§. 55.

Zusatz. Jede durch eine zu einer Ebene senkrechte Gerade gelegte zweite Ebene steht senkrecht zur ersten Ebene.

§. 56.

Lehrsatz. In einem Punkte einer Ebene läßt sich auf dieser nur Eine senkrechte Gerade errichten.

Beweis. Es stehe z. B. die Gerade EF senkrecht auf der Ebene ABCD (Fig. 22). Man ziehe durch den Fußpunkt F der EF eine beliebig andere Gerade FG außerhalb der Ebene ABCD und denke sich durch EF und GF eine Ebene gelegt, welche die Ebene ABCD nach einer Geraden HJ schneiden muß, so ist EF senkrecht auf HJ, GF also schief auf HJ und somit auch schief

auf ABCD (§. 51, II). Daher kann außer der EF keine andere durch F gehende Gerade auch senkrecht auf ABCD sein.

§. 57.

Zusatz. Wenn zwei Ebenen ABCD und EFGH (Fig. 20) senkrecht auf einander stehen und man errichtet in einem Punkte J ihrer Schnittlinie EF auf der einen Ebene ABCD eine Senkrechte, so muß diese in die andere Ebene EFGH fallen.

Denn zieht man durch J in der Ebene EFGH Gerade JK senkrecht auf EF, so ist JK senkrecht auf ABCD im Punkte J (§. 50) und da auf ABCD im Punkte J nur Eine senkrechte Gerade errichtet werden kann, so muß die auf Ebene ABCD in J errichtete Senkrechte mit JK zusammenfallen, also in Ebene EFGH zu liegen kommen.

§. 58.

Lehrsatz. Von einem außerhalb einer Ebene gelegenen Punkte läßt sich auf diese nur Eine senkrechte Gerade fällen.

Beweis. Ist z. B. (Fig. 21) die vom Punkte E ausgehende Gerade EF senkrecht auf Ebene ABCD und von E aus eine beliebige, jedoch die Ebene ABCD treffende Gerade EG gezogen, so kann EG nicht auch senkrecht auf ABCD sein.

Denn denkt man sich durch EF und EG eine Ebene gelegt, welche die Ebene ABCD nach der Geraden FG schneidet, so ist EF senkrecht auf FG, also EG schief auf FG und somit nicht senkrecht auf ABCD (§. 51, II).

§. 59.

Zusätze. I. Stehen zwei Ebenen EFGH und ABCD (Fig. 20) senkrecht aufeinander, und ist von einem Punkte K der einen Ebene EFGH auf die andere ABCD eine senkrechte Gerade gefällt, so muß letztere ganz in der ersten Ebene liegen.

Denn fällt man in der Ebene EFGH von K aus KJ senkrecht auf EF, so ist KJ senkrecht auf ABCD (§. 50), und da man von K auf ABCD nur Eine senkrechte Gerade fällen kann

(§. 58), so muß die von K auf ABCD gefällte Senkrechte mit KJ zusammenfallen, also in der Ebene EFGH liegen.

II. Wenn zwei sich schneidende Ebenen senkrecht auf einer dritten stehen, so ist auch ihre Durchschnittslinie senkrecht auf der dritten Ebene.

Die besprochene Durchschnittslinie kann nicht in der dritten Ebene liegen (§. 35, IV). Denkt man sich von einem außerhalb der dritten Ebene gelegenen Punkte der Durchschnittslinie auf diese Ebene eine Senkrechte gefällt, so muß Letztere in jeder der beiden ersten Ebenen liegen (§. 59, I), also mit der Durchschnittslinie der beiden ersten Ebenen zusammenfallen. Folglich ist die Durchschnittslinie der beiden ersten Ebenen senkrecht auf der dritten Ebene. *)

III. Durch eine zu einer Ebene nicht senkrechte Gerade ist nicht mehr als Eine zu dieser Ebene senkrechte Ebene denkbar. (Folgt indirekt aus §. 59, II.)

IV. Zwei Ebenen E_1 und E_2 sind parallel, wenn sie senkrecht auf einer dritten Ebene E_3 stehen und diese nach parallelen Linien G_1 und G_2 schneiden.

Denn wären sie nicht parallel, so müßten sie sich nach einer Linie G_3 schneiden, die nach §. 20, I den Linien G_1 und G_2 und also auch der Ebene E_3 parallel wäre (§. 4), was nach §. 59, II unmöglich ist.

§. 60.

Lehrsatz. Durch einen Punkt einer Geraden ist nur Eine zu dieser senkrechte Ebene denkbar.

Beweis. KJ sei senkrecht auf ABCD (Fig. 19) und durch J sei eine beliebige andere Ebene EFGH gelegt, welche die ABCD nach einer Geraden MN schneidet, so muß KJ schief auf EFGH sein.

Denn denkt man sich durch KJ eine beliebige, jedoch nicht

*) Der Beweis dieses Satzes wurde nicht mit Hülfe der Kongruenz von Dreikanten gegeben, weil dabei stillschweigend hätte vorausgesetzt werden müssen, daß die Durchschnittslinie der beiden ersten Ebenen auf keinen Fall parallel mit der dritten Ebene gehen könne, welche Voraussetzung zu machen wir nach dem Bisherigen nicht berechtigt sind.

durch MN gehende Ebene gelegt, welche die Ebenen ABCD und EFGH nach zwei Geraden JO und JQ schneidet, so ist KJ senkrecht auf JO, also schief auf JQ und somit nicht senkrecht auf EFGH. (§. 51, II.)

§. 61.

Lehrsatz. Laufen beliebig viele Gerade durch einen und denselben Punkt und stehen zugleich alle senkrecht auf einer durch diesen Punkt gezogenen Geraden, so liegen alle jene Gerade in Einer Ebene, welche senkrecht zur letzteren Geraden ist.

Beweis. Stehen z. B. auf der Geraden JK (Fig. 19) die Geraden OW und MN senkrecht, so kann man sich durch letztere eine Ebene ABCD gelegt denken, welche senkrecht auf JK ist (§. 52). Ginge nun durch J eine andere zu JK senkrechte Gerade QV, ohne in der Ebene ABCD zu liegen, so könnte man sich durch QV und MN eine Ebene EFGH gelegt denken, welche nach §. 52 auch senkrecht auf JK wäre, was nach §. 60 unmöglich ist. Folglich muß jede andere durch J gehende Gerade, welche senkrecht auf JK ist, in der Ebene ABCD liegen. Also liegen alle Gerade, welche durch Punkt J gehen und auf JK senkrecht sind, in Einer Ebene, welche senkrecht zu JK ist.

§. 62.

Zusatz. Bewegt man einen rechten (ebenen) Winkel um einen seiner Schenkel herum, während dieser Schenkel und der Scheitel ihre Lage nicht verändern, so beschreibt der andere Schenkel eine Ebene, welche senkrecht auf dem ersten Schenkel steht.

§. 63.

Lehrsatz. Gerade Linien, welche auf einer und derselben Ebene senkrecht stehen, sind parallel.

Beweis. Die Geraden MN und PR (Fig. 23) seien senkrecht auf der Ebene ABCD. Man verbinde ihre Fußpunkte N und R durch eine Gerade und denke sich durch letztere eine Ebene senkrecht zu ABCD. In dieser Ebene muß sowohl MN als PR liegen (§. 57). Da die beiden Geraden MN und PR außerdem

noch senkrecht auf der Linie EF stehen, so sind sie nach einem bekannten Satze der ebenen Geometrie parallel.

§. 64.

Zusatz. Stehen eine Gerade JK und eine Ebene LMNP senkrecht zu einer zweiten Ebene ABCD (Fig. 18), so ist, vorausgesetzt daß JK nicht in der Ebene LMNP liegt, JK parallel LMNP.

Denn denkt man sich durch JK eine Ebene GHJK gelegt, welche die Ebene LMNP nach einer Geraden EF schneidet, so ist GHJK senkrecht auf ABCD (§. 54), folglich ist auch EF senkrecht zu ABCD (§. 59, II.) und JK parallel EF (§. 63), also auch parallel LMNP (§. 4).

§. 65.

Lehrsatz. Steht eine von zwei parallelen Geraden senkrecht auf einer Ebene, so muß auch die andere auf jener Ebene senkrecht sein.

Beweis. Seien die Geraden MN und PR parallel (Fig. 23) und MN senkrecht zur Ebene ABCD. Denkt man sich die durch die beiden Parallellinien MN und PR bestimmte Ebene EFGH, welche die Ebene ABCD nach der Geraden EF schneidet, so muß EFGH senkrecht auf ABCD (§. 54) und MN senkrecht zu EF (§. 51, I.) sein. Da PR mit MN und EF in einer Ebene liegt, MN parallel PR und senkrecht zu EF ist, so ist auch PR senkrecht zu EF und folglich senkrecht zu ABCD (§. 50).

§. 66.

Zusätze. I. Steht eine Gerade JK (Fig. 18) senkrecht auf einer Ebene ABCD und geht eine Ebene LMNP parallel mit JK, so ist auch LMNP senkrecht zu ABCD.

Denn denkt man sich durch JK eine Ebene GHJK gelegt, welche die Ebene LMNP nach einer Geraden EF schneidet, so ist EF parallel JK (§. 6), also EF senkrecht zu ABCD (§. 65); folglich auch LMNP senkrecht zu ABCD (§. 54).

II. **Ist eine von zwei parallelen Geraden schief auf einer Ebene, so ist auch die andere schief zu dieser Ebene.**

Die zweite Gerade muß die Ebene schneiden (§. 7). Daß sie schief auf der Ebene stehen muß, folgt indirekt aus §. 65.

§. 67.

Lehrsatz. Stehen eine Gerade und eine Ebene senkrecht auf einer zweiten Geraden, so ist die erstere Gerade vorausgesetzt, daß sie nicht in der gegebenen Ebene selbst liegt, parallel zu ihr.

Beweis. Stehen z. B. (Fig. 20) die Ebene ABCD und die nicht in ihr liegende Gerade HG senkrecht auf der Geraden KJ, so denke man sich die durch die Geraden HG und KJ bestimmte Ebene, welche die Ebene ABCD nach einer Geraden EF schneidet, die senkrecht auf KJ (§. 51, I) und also nach einem bekannten Satze der ebenen Geometrie parallel der HG sein muß.

Daraus folgt, daß auch HG parallel ABCD sein muß (§. 4).

§. 68.

Lehrsatz. Wenn zwei Ebenen senkrecht auf einer Geraden stehen, so sind sie parallel.

Beweis. Die Gerade JK stehe senkrecht auf den Ebenen ABCD und EFGH (Fig. 24). Durch den Schnittpunkt J der Geraden KJ mit der Ebene EFGH denke man sich in letzterer Ebene zwei Gerade ST und QR gezogen, so stehen diese senkrecht zu KJ (§. 51, I) und sind also parallel der Ebene ABCD (§. 67); folglich müssen auch die Ebenen ABCD und EFGH parallel sein (§. 9).

§. 69.

Lehrsatz. Trifft eine Gerade eine Ebene und eine dieser parallele Gerade und ist senkrecht auf der Ebene, so ist sie auch senkrecht auf der zweiten Geraden.

Beweis. Sind z. B. (Fig. 20) die Gerade HG und die Ebene ABCD parallel und die Gerade KJ, welche die HG im

Punkte K schneidet, steht senkrecht zur Ebene ABCD, so ist auch KJ senkrecht zu HG.

Denn denkt man sich die durch HG und KJ bestimmte Ebene, welche die Ebene ABCD nach der Geraden EF schneiden soll, so ist KJ senkrecht auf EF (§. 51, I) und HG parallel EF (§. 6), folglich muß, nach einem bekannten Satze der ebenen Geometrie, auch KJ senkrecht auf HG sein.

§. 70.

Zusatz. Wenn eine Gerade und eine Ebene parallel sind, so sind alle zu beiden senkrechte und von beiden begrenzte Gerade einander gleich (§§. 63 und 22).

§. 71.

Lehrsatz. Wenn von zwei parallelen Ebenen die eine senkrecht auf einer Geraden steht, so ist auch die andere senkrecht auf dieser Geraden.

Beweis. Die Ebenen ABCD und EFGH seien parallel und die Gerade JK stehe senkrecht auf Ebene ABCD (Fig. 24), so muß sie auch senkrecht auf Ebene EFGH sein.

Die Gerade JK muß die Ebene EFGH schneiden (§. 13). Denkt man sich durch den Schnittpunkt J der Geraden KJ mit der Ebene EFGH in letzterer Ebene zwei Gerade ST und QR gezogen, so sind diese parallel der Ebene ABCD (§. 10, III) und folglich senkrecht zu JK (§. 69), also muß auch Ebene EFGH senkrecht zu JK sein (§. 52).

§. 72.

Zusätze. I. Sind zwei Ebenen parallel, so sind alle zu beiden senkrechte und von beiden begrenzte Gerade einander gleich (§§. 63 und 23).

II. Ist eine Gerade auf einer von zwei parallelen Ebenen schief, so ist sie auch schief auf der andern. (Folgt aus §. 18 und indirekt aus §. 71.)

III. Ist eine Ebene E_1 senkrecht auf der einen E_2 von zwei parallelen Ebenen E_2 und E_3, so ist sie auch senkrecht auf der andern E_3.

Denn denkt man sich in der Ebene E_1 eine Gerade G senkrecht zur Schnittlinie der Ebenen E_1 und E_2 gezogen, so ist G zugleich senkrecht zu E_2 (§. 50), sowie senkrecht zu E_3 (§. 71); folglich muß auch E_1 senkrecht auf E_3 sein (§. 55.)

IV. Ist eine Ebene schief auf einer von zwei parallelen Ebenen, so ist sie auch schief auf der andern. (Folgt aus §. 15 und indirekt aus §. 72, III.)

§. 73.

Lehrsatz. Wenn eine Gerade JK (Fig. 25) auf zweien nicht parallelen Geraden LM und PN, die in zwei parallelen Ebenen ABCD und EFGH liegen, senkrecht steht, so ist erstere Gerade zugleich senkrecht auf den parallelen Ebenen.

Beweis. Denkt man sich durch JK und LM eine Ebene gelegt, welche die Ebene EFGH nach einer zu LM parallelen Geraden RS schneidet (§. 10, IV), so ist nach einem bekannten Satze der ebenen Geometrie JK auch senkrecht auf RS, folglich senkrecht auf Ebene EFGH (§. 52), sowie auf ABCD (§. 71).

§. 74.

Lehrsatz. Unter allen Geraden, welche man von einem außerhalb einer Ebene gelegenen Punkte nach den verschiedenen Punkten der Ebene ziehen kann, ist die zur Ebene senkrechte die kürzeste; unter den übrigen sind je zwei einander gleich oder ungleich, je nachdem ihre Fußpunkte gleichweit vom Fußpunkt jener Senkrechten entfernt sind oder nicht, und zwar ist unter zwei ungleichen diejenige die größere, deren Fußpunkt weiter vom Fußpunkt der Senkrechten abliegt, als der Fußpunkt der andern und umgekehrt.

Beweis. I. Die Gerade EF (Fig. 26) sei senkrecht auf der Ebene ABCD und vom Punkte E an den beliebigen Punkt H der Ebene ABCD die Gerade EH gezogen, so muß EF kleiner als EH sein.

Denn denkt man sich durch EF und EH eine Ebene gelegt, welche die Ebene ABCD nach der Geraden FH schneidet, so entsteht das bei F rechtwinklige Dreieck EFH, in welchem EF als Kathete kleiner als die die Hypotenuse vorstellende EH ist.

II. Sei von F aus in der Ebene ABCD eine Gerade FG gleich FH gezogen und Punkt G mit E verbunden, so muß EG gleich EH sein.

Denn denkt man sich durch EF und EG eine Ebene gelegt, welche die Ebene ABCD nach der Geraden FG schneidet, so entsteht das rechtwinklige Dreieck EFG, welches dem Dreieck EFH kongruent ist. Folglich ist EH gleich EG.

III. Sei von F aus in der Ebene ABCD eine Gerade FJ gezogen, welche größer als FG ist und J mit E verbunden, so muß EJ größer als EG sein.

Denn denkt man sich durch EF und EJ eine Ebene gelegt, welche die Ebene ABCD nach der Geraden JF schneidet, FK gleich FG gemacht und in der Ebene EFJ die Gerade EK gezogen, so ist nach einem Satze der ebenen Geometrie EJ größer als EK. EK ist aber gleich EG, nach Nro. II. des Beweises; folglich ist auch EJ größer als EG.

IV. und V. Wenn man noch nicht wüßte, daß FH gleich FG und daß FJ größer als FG ist, wohl aber, daß EH gleich EG und EJ größer als EG ist, so könnte man indirekt mittelst II. und III. erschließen, daß FH gleich FG und FJ größer als FG ist.

§. 75.

Zusätze. I. Weil die von einem Punkte auf eine Ebene gefällte senkrechte Gerade die kürzeste ist unter allen Geraden, welche man von jenem außerhalb der Ebene gelegenen Punkte an diese ziehen kann, so sagt man, sie gebe den Abstand des Punktes von der Ebene an.

II. Wenn eine Gerade und eine Ebene parallel sind, so ist unter den Geraden, welche Punkte von beiden verbinden, eine zu beiden senkrechte immer kürzer als eine zu beiden nicht zugleich senkrechte. — Man sagt deßhalb und auf Grund von §. 70 von

einer solchen Senkrechten, sie gebe den Abstand zwischen der Geraden und der ihr parallelen Ebene an.

III. Jede zu zwei parallelen Ebenen schiefe Gerade ist größer als irgend eine zu beiden senkrechte. — Man sagt deßhalb und auf Grund von §. 72, I, eine solche Senkrechte gebe den Abstand der parallelen Ebenen an.

§. 76.

Lehrsatz und Erklärung. Zu zweien nicht in Einer Ebene liegenden Geraden gibt es immer eine dritte Gerade, welche auf den beiden ersten zugleich senkrecht steht, aber nur eine einzige. Zugleich ist diese kleiner als jede andere Gerade, welche zwei beliebige Punkte der zwei ersten Geraden verbindet und man sagt deßhalb von ihr, sie gebe den Abstand der beiden nicht in Einer Ebene liegenden Geraden an.

Beweis. I. (Fig. 25.) LM und NP seien die beiden nicht in Einer Ebene liegenden Geraden. Man denke sich durch dieselben ein Paar paralleler Ebenen ABCD und EFGH gelegt, was nach §. 12 immer möglich ist, durch LM eine Ebene senkrecht zu ABCD und durch NP eine Ebene senkrecht zu EFGH. Die beiden neuen Ebenen, von welchen jede senkrecht zu jeder der Ebenen ABCD und EFGH sein muß (§. 72, III), können nach §. 18, II nicht auch parallel sein, sondern müssen sich nach einer Geraden JK schneiden, welche nach §. 59, II auf den Ebenen ABCD und EFGH und somit auch auf den Linien LM und NP zugleich senkrecht sein muß (§. 51, I).

Demnach existirt immerhin eine Gerade, welche auf zweien nicht in Einer Ebene liegenden Geraden LM und NP zugleich senkrecht steht.

II. Irgend eine Gerade, von der wir annehmen, sie stehe auf den Geraden LM und NP zugleich senkrecht, ist senkrecht auf den Ebenen ABCD und EFGH (§. 73), muß also in jeder der durch LM und NP gehenden beziehungsweise zu den Ebenen ABCD und EFGH senkrechten Ebenen (§. 57), somit im Durchschnitte JK derselben liegen. Folglich kann es blos Eine zu den Geraden LM und NP zugleich senkrechte Gerade geben.

III. Jede andere zwischen den Linien LM und NP liegende Gerade muß nach II wenigstens auf einer dieser beiden Linien, also auch auf den Ebenen ABCD und EFGH schief sein, (§§. 51, II und 72, II) und somit größer sein als die zu den Ebenen ABCD und EFGH senkrechte Gerade JK (§. 75, III).

Fünfter Abschnitt.

Von der schiefen Lage einer Linie und Ebene. — Neigungswinkel beider.

§. 77.

Erklärung. Fällt man aus einem beliebigen Punkte einer zu einer Ebene nicht senkrechten Geraden, welche außerhalb der Ebene liegt, auf diese eine Senkrechte, so bestimmt letztere mit der gegebenen Geraden eine Ebene, welche senkrecht zu der gegebenen Ebene steht (§. 55) und somit alle Senkrechte enthält, die man von beliebigen Punkten der gegebenen Linie auf die gegebene Ebene fällen kann (§. 59, I).

Wenn man daher aus beliebig vielen Punkten einer zu einer Ebene nicht senkrechten Geraden, welche außerhalb der Ebene liegt, auf diese Senkrechte fällt, so liegen letztere in Einer Ebene, welche senkrecht zur gegebenen Ebene ist und ihre Fußpunkte in Einer Geraden, welche für den Fall, daß die erste Gerade die ursprüngliche Ebene in einem Punkte schneidet, durch diesen geht (§. 3, VI) und mit der ersten Geraden einen (ebenen) spitzen Winkel bildet, der der Neigungswinkel der ursprünglichen Geraden gegen die ursprüngliche Ebene genannt wird.

Steht eine Gerade schief auf einer Ebene, so kann demnach der Neigungswinkel beider gefunden werden, indem man von irgend einem Punkte der Geraden auf die Ebene eine Senkrechte fällt und deren Fußpunkt mit dem Fußpunkte der gegebenen Geraden verbindet.

§. 78.

Lehrsatz. Steht eine Gerade schief auf einer Ebene, so ist unter allen Winkeln, die erstere gegen die verschiedenen Geraden bildet, welche von ihrem Fußpunkte aus in der Ebene gezogen werden können, ihr Neigungswinkel gegen die Ebene der kleinste und der Nebenwinkel des Neigungswinkels der größte; ferner sind unter den übrigen Winkeln je zwei einander gleich oder ungleich, je nachdem ihre in der Ebene liegenden Schenkel mit dem in der Ebene liegenden Schenkel des Neigungswinkels gleiche oder ungleiche Winkel machen und zwar ist unter jenen ungleichen Winkeln derjenige der größere, dessen in der Ebene liegender Schenkel mit dem in der Ebene liegenden Schenkel des Neigungswinkels den größeren Winkel macht und umgekehrt.

Beweis. I. (Fig. 27.) Der Winkel LEF sei der Neigungswinkel der Geraden LE gegen die Ebene ABCD und EH sei eine beliebige durch den Fußpunkt E in der Ebene ABCD gezogene Gerade. Man denke sich durch EL die zwei Ebenen gelegt, welche die Ebene ABCD nach den Geraden EH und FEG schneiden. Als rechter oder stumpfer Winkel wäre der ebene Winkel LEH ohnehin größer als der (spitze) Neigungswinkel LEF. Ist aber der Winkel LEH spitz, so ist er kleiner als der stumpfe Nebenwinkel GEL des Neigungswinkels LEF. Folglich ist in diesem Falle im Dreikante ELHG der rechte Flächenwinkel an der Kante G kleiner als der Flächenwinkel an der Kante H (§. 45), dieser also ein Stumpfer (§. 35, I), und sein Nebenwinkel LHF als Spitzer kleiner als der rechte Flächenwinkel LFH (§. 35, VI), woraus sich dann ergibt, daß im Dreikante ELFH Seite LEF kleiner als Seite LEH ist (§. 44).

II. Zieht man durch E in der Ebene ABCD eine beliebige zweite Gerade MN, so ist z. B. der (ebene) Winkel LEM kleiner als der Winkel LEG, weil der Nebenwinkel LEN von LEM nach I. größer ist als der Nebenwinkel LEF von LEG.

III. Zieht man ferner durch E in der Ebene ABCD eine Gerade EJ, welche mit EF einen dem Winkel HEF gleichen Winkel JEF macht, und denkt man sich nun durch EL und EJ eine Ebene gelegt, so entsteht das Dreikant EFLJ, welches dem

Dreikante EFLH symmetrisch ist (§. 39), da es mit ihm zwei Seiten (LEF = LEF und JEF = HEF) und den eingeschlossenen Winkel als Rechten gleich hat, woraus folgt, daß Seite LEJ gleich Seite LEH ist.

IV. Zieht man hernach noch eine Gerade EK durch Punkt E in der Ebene ABCD so, daß sie mit EF einen Winkel bildet, der größer ist als der Winkel JEF oder der ihm gleiche HEF, so muß der Winkel LEK größer sein als der Winkel LEJ oder der ihm gleiche LEH.

Denn denkt man sich durch EL und EK eine Ebene gelegt, so ist in dem dadurch entstandenen Dreikante EFLK Seite LEF kleiner als Seite LEK (nach I.) und daher auch Winkel LKF oder LKJ kleiner als der rechte Winkel LFK, folglich LKJ ein Spitzer (§. 35, II). Aus ähnlichem Grunde ist im Dreikante ELFJ Winkel LJF ein Spitzer, sein Nebenwinkel LJK also ein Stumpfer und als solcher größer als der Winkel LKJ (§. 35, VII), woraus folgt, daß im Dreikante EJKL Seite LEK größer als Seite LEJ ist (§. 44).

V. und VI. Wenn man noch nicht wüßte, daß Winkel FEJ gleich Winkel FEH, wohl aber, daß Winkel LEJ gleich LEH ist, und wenn man ferner noch nicht wüßte, daß Winkel KEF größer als HEF, wohl aber, daß Winkel LEK größer als LEH ist, so würde sich indirekt mittelst III. und IV. leicht folgern lassen, daß Winkel JEF gleich HEF, und KEF größer als HEF ist.

§. 79.

Lehrsatz. Der eine Schenkel des Neigungswinkels einer Geraden gegen eine Ebene bildet mit einer vom Fußpunkte der Geraden aus in der Ebene gezogenen Geraden einen spitzen, stumpfen oder rechten Winkel, je nachdem mit letzterer Geraden auch der andere Schenkel einen spitzen, stumpfen oder rechten Winkel macht.

Beweis. I. (Fig. 28.) GEF sei der Neigungswinkel der Geraden EG gegen die Ebene ABCD. Man ziehe durch Punkt E in der Ebene ABCD eine Gerade beliebig, jedoch so, daß sie mit EF zwei ungleiche Nebenwinkel JEF und HEF macht. Ist nun z. B. JEF der größere und HEF der kleinere von beiden

oder mit andern Worten JEF stumpf und HEF spitz, so ist nach §. 78, IV auch JEG größer als HEG oder mit andern Worten JEG stumpf und HEG spitz.

II. Wenn man noch nicht wüßte, daß JEF stumpf und HEF spitz wohl aber, daß JEG stumpf und HEG spitz, d. h. JEG größer als HEG ist, so könnte man aus §. 78, VI folgern, daß JEF größer als HEF oder JEF stumpf und HEF spitz ist.

III. Man ziehe ferner durch E in der Ebene ABCD Linie MN senkrecht zu EF, d. h. so, daß sie mit EF zwei gleiche Nebenwinkel oder rechte Winkel bildet, so müssen nach §. 78, III auch die Winkel NEG und MEG gleich sein, oder mit andern Worten, die Winkel NEG und MEG müssen Rechte sein.

IV. Wenn man noch nicht wüßte, daß die Winkel NEF und MEF Rechte sind, wohl aber, daß die Winkel MEG und NEG Rechte sind, so würde man mittelst §. 78, V von der Gleichheit der Winkel MEG und NEG auf die Gleichheit der Winkel NEF und MEF schließen und also finden, daß die Winkel NEF und MEF Rechte sind.

§. 80.

Zusätze. I. Der eine Schenkel des Neigungswinkels einer Geraden gegen eine Ebene steht senkrecht oder schief auf einer durch den Fußpunkt der Geraden in der Ebene gezogenen Geraden, je nachdem der andere Schenkel senkrecht oder schief auf der letztern Geraden ist.

II. Fällt man von einem außerhalb einer Ebene gelegenen Punkte auf diese eine Senkrechte, vom Fußpunkte derselben auf eine in der Ebene gezogene Gerade eine zweite Senkrechte und verbindet den Fußpunkt der letztern mit jenem außerhalb der Ebene gelegenen Punkte durch eine Gerade, so steht diese auch senkrecht zu der zuerst in der Ebene gezogenen Geraden.

III. Fällt man von einem außerhalb einer Ebene gelegenen Punkte auf diese, so wie auf eine in der Ebene gezogene Gerade zwei Senkrechte und verbindet deren Fußpunkte durch eine Gerade, so steht diese auch senkrecht zu der zuerst in der Ebene gezogenen Geraden.

§. 81.

Lehrsatz. Fällt man von einem außerhalb einer Ebene ABCD gelegenen Punkte E (Fig. 29) auf eine in der Ebene gezogene Gerade MN eine Senkrechte EF, zieht durch den Fußpunkt F derselben in der Ebene die Gerade FG senkrecht zu MN, so ist die durch die Geraden EF und FG bestimmte Ebene EFG senkrecht auf Ebene ABCD.

Beweis. Die Gerade MN steht senkrecht auf der Ebene EFG, weil sie auf den Geraden FE und FG senkrecht ist (§. 52); folglich steht auch die durch MN gehende Ebene ABCD senkrecht auf Ebene EFG (§. 55), also auch EFG senkrecht auf ABCD (§. 33, IV).

§. 82.

Zusatz. Fällt man von einem beliebigen Punkt E der EF eine Senkrechte EH auf Linie FG, so ist EH auch senkrecht zur Ebene ABCD (§. 50). — Zugleich stellt der Winkel EFG den Neigungswinkel der Linie EF gegen die Ebene ABCD vor.

§. 83.

Lehrsatz. Fällt man von einem außerhalb einer Ebene ABCD (Fig. 30) gelegenen Punkte E auf zwei in der Ebene gezogene sich schneidende Gerade MN und PN zwei Senkrechte EF und EG, zieht durch die Fußpunkte F und G derselben in der Ebene, senkrecht zu den in der Ebene gezogenen Geraden MN und PN, beziehungsweise zwei Gerade FH und GH, welche sich nach Begriffen der ebenen Geometrie in einem Punkte H schneiden müssen, so bildet dieser Punkt den Fußpunkt einer Geraden, die vom Punkte E ausgeht und auf der Ebene ABCD senkrecht steht.

Beweis. Denkt man sich durch die Geraden EG und HG einerseits und durch die Geraden EF und FH anderseits Ebenen gelegt, so müssen diese sich nach der geraden Verbindungslinie EH der beiden Punkte E und H schneiden und nach §. 81 senkrecht auf der Ebene ABCD stehen; folglich muß auch EH senkrecht auf ABCD sein (§. 59, II).

§. 84.

Lehrsatz. Ist eine Gerade schief zu zwei parallelen Ebenen, so bildet sie mit denselben gleiche Neigungswinkel.

Beweis. Die beiden parallelen Ebenen seien ABCD und KLMN (Fig. 31) und EH sei die auf ihnen schiefe Gerade. F und H bilden die Schnittpunkte der EH mit den Ebenen ABCD und KLMN. Vom Punkte E der EH, der nicht zwischen beiden Ebenen liegt, denke man sich EJ senkrecht auf ABCD und KLMN gefällt und durch EH und EJ eine Ebene gelegt, welche die Ebenen ABCD und KLMN nach zwei Geraden FG und HJ schneidet, die parallel sind und mit EH die zwei gleichen korrespondirenden Winkel EFG und EHJ bilden. Letztere stellen aber die Neigungswinkel der EH gegen die Ebenen ABCD und KLMN vor (§. 77). Also bildet EH mit den parallelen Ebenen ABCD und KLMN gleiche Neigungswinkel.

§. 85.

Lehrsatz. Wenn zwei Linienwinkel, welche in verschiedenen Ebenen liegen, parallele Schenkel haben, die vom Scheitel aus in demselben Sinne gehen, so sind diese Winkel gleich.

Beweis. Seien BAC und EDF (Fig. 32) die beiden Winkel. Denkt man sich durch die parallelen Schenkel AB und DE, sowie durch die parallelen Schenkel AC und DF Ebenen gelegt, so entstehen die Dreikante ABCM und DEFM, welche zwei Seiten (MAB = MDE und MAC = MDF) und den eingeschlossenen Winkel beziehungsweise gleich haben und nach §. 39. kongruent sind, woraus folgt, daß Seite BAC gleich Seite EDF ist.

§. 86.

Lehrsatz. Stehen zwei parallele Gerade schief auf einer Ebene, so bilden sie mit der Ebene gleiche Neigungswinkel.

Beweis. Die Geraden EF und HJ seien parallel und schief auf der Ebene ABCD (Fig. 33). Man denke sich von den

Punkten E und H der EF und HJ zwei Senkrechte EG und HK auf ABCD gefällt und durch EF und EG einerseits, durch HJ und HK anderseits, Ebenen gelegt, welche die Ebene ABCD nach den Geraden FG und JK schneiden. Da EF parallel HJ (nach der Vorauss.) und EG parallel HK ist (§. 63), so ist Ebene EFG parallel Ebene HJK (§. 11), folglich FG parallel JK (§. 10, IV) und Winkel EFG gleich Winkel HJK (§. 85). Letztere Winkel stellen aber die Neigungswinkel der Geraden EF und HJ gegen die Ebene ABCD vor (§. 77).

Sechster Abschnitt.

Von den Neigungswinkeln der Flächenwinkel.

§. 87.

Erklärung. Wenn zwei Ebenen von einer Geraden ausgehen, und man errichtet auf dieser Geraden in irgend einem ihrer Punkte in jeder Ebene eine senkrechte Gerade, so heißt der durch diese Senkrechten gebildete ebene Winkel der Neigungswinkel der beiden Ebenen oder des durch die beiden Ebenen gebildeten (hohlen) Flächenwinkels. — Der Neigungswinkel zweier Ebenen ändert seine Größe nicht, man mag seinen Scheitel annehmen in welchem Punkte der Scheitellinie man will (§. 85).

Die Ebene des Neigungswinkels steht senkrecht auf der Scheitellinie des zugehörigen Flächenwinkels (§. 52) und auf den Schenkelebenen des letzteren (§. 55).

Zerlegt man einen Flächenwinkel mittelst durch seine Scheitellinie gehende Ebenen in mehrere, so stehen diese Ebenen auch senkrecht auf der Ebene des Neigungswinkels (§. 55), und schneiden letztere nach Geraden, welche senkrecht auf der Scheitellinie stehen (§. 51, I) und den Neigungswinkel in ebene Winkel zerlegen, die

beziehungsweise die Neigungswinkel der Flächenwinkel bilden, in welche der gegebene Flächenwinkel getheilt wurde.

§. 88.

Lehrsatz. Gleiche Flächenwinkel haben gleiche Neigungswinkel.

Beweis. (Fig. 34). Es sei der Flächenwinkel BGH, welcher den ebenen Winkel JGH zum Neigungswinkel habe, gleich dem Flächenwinkel QTO, dessen Neigungswinkel der ebene Winkel STP sei, so ist in den Dreikanten GAJH und TLSP

Seite AGJ gleich Seite LTS (gleich 90°)
Seite AGH gleich Seite LTP und
Winkel JAH gleich Winkel SLP (nach der Vorausf.)

Die Dreikante sind nach §. 39 kongruent, folglich die Neigungswinkel JGH und STP gleich.

§. 89.

Zusatz. Der Neigungswinkel eines rechten Flächenwinkels ist ein rechter ebener Winkel (Fig. 35).

Der Beweis folgt aus §. 29, I und §. 88 oder wenn man will aus §. 50.

§. 90.

Lehrsatz. Flächenwinkel, welche gleiche Neigungswinkel haben, sind einander gleich.

Beweis. (Fig. 34.) Seien JGH und STP die Neigungswinkel der Flächenwinkel BGF und QTO, so ist in den Dreikanten GAJH und TLSP

Seite AGJ gleich Seite LTS
Seite AGH gleich Seite LTP und
Seite JGH gleich Seite STP;

folglich sind diese beiden Dreikante nach §. 49 kongruent und daher ist Flächenwinkel BGF gleich Flächenwirkel QTO.

§. 91.

Zusatz. Ist der Neigungswinkel eines Flächenwinkels ein rechter (ebener) Winkel, so ist auch der Flächenwinkel ein Rechter. (Fig. 35).

Der Beweis folgt aus den §§. 90 und 29, I oder wenn man will aus den §§. 52 und 54.

§. 92.

Lehrsatz. Wenn zwei Flächenwinkel ungleich sind, so hat der größere einen größern Neigungswinkel als der andere.

Beweis. (Fig. 36.) Es sei der Flächenwinkel EAF, welcher den ebenen Winkel EDF zum Neigungswinkel habe, größer als der Flächenwinkel OKP, dessen Neigungswinkel der ebene Winkel ONP sei. In den Dreikanten DAEF und NKOP ist:

Seite ADE gleich Seite KNO (gleich 90°),
Seite ADF gleich Seite KNP,
aber Winkel EAF größer als Winkel OKP;

folglich ist nach §. 47 Seite EDF größer als Seite ONP.

§. 93.

Zusatz. (Fig. 37.) Ein spitzer Flächenwinkel hat einen spitzen Neigungswinkel, ein stumpfer Flächenwinkel hat einen stumpfen Neigungswinkel.

Der Beweis folgt aus den §§. 29, II und 92.

§. 94.

Lehrsatz. Von zwei Flächenwinkeln, welche ungleiche Neigungswinkel haben, ist derjenige der größere, welcher den größern Neigungswinkel hat.

Beweis. (Fig. 36.) Seien EDF und ONP die Neigungswinkel der Flächenwinkel EAF und OKP und sei EDF größer als ONP, so ist in den Dreikanten DAEF und NKOP

Seite ADE gleich Seite KNO
Seite ADF gleich Seite KNP,
aber Seite EDF größer als Seite ONP;

folglich ist in diesen Dreikanten nach §. 48 Flächenwinkel EAF größer als Flächenwinkel OKP.

§. 95.

Zusatz. (Fig. 37.) Ein Flächenwinkel ist stumpf oder spitz, je nachdem sein Neigungswinkel stumpf oder spitz ist.

Der Beweis folgt aus den §§. 94 und 29, II.

§. 96.

Lehrsatz. Wenn zwei Ebenen von einer dritten in parallelen Durchschnittslinien geschnitten werden und es sind zwei korrespondirende Flächenwinkel einander gleich, so sind die Ebenen parallel.

Beweis. (Fig. 38.) Die Linien EF und LM, nach welchen die Ebenen ABCD und UQPT von der Ebene RHGS geschnitten werden, seien parallel. Ferner seien die Flächenwinkel GFC und GMP gleich. Man ziehe in der Ebene RHGS eine Gerade VZ senkrecht zu den parallelen Linien EF und LM, welche die Linien EF und LM in den Punkten K und N treffe. Ferner ziehe man in der Ebene ABCD Linie KJ senkrecht auf EF und denke sich durch VZ und KJ eine Ebene gelegt, welche senkrecht auf EF (§. 52) und somit auch senkrecht auf LM (§. 65) steht, folglich die Ebene UQPT nach einer zu LM senkrechten Geraden NO schneidet (§. 51, I).

Die ebenen Winkel ZKJ und ZNO stellen demnach die Neigungswinkel der gleichen Flächenwinkel GFC und GMP vor (§. 87), sind also selbst gleich (§. 88). Nach einem bekannten Lehrsatze der ebenen Geometrie ist also KJ parallel NO und da außerdem EF parallel LM, so sind die Ebenen ABCD und UQPT parallel (§. 11).

§. 97.

Lehrsatz. Wenn zwei parallele Ebenen von einer dritten Ebene geschnitten werden, so sind korrespondirende Flächenwinkel einander gleich.

Beweis. (Fig. 38.) Die Ebenen ABCD und UQPT, welche von der Ebene RHGS in den Linien EF und LM ge-

schnitten werden, seien parallel. EF und LM müssen parallel sein (§. 10, IV).

Macht man die Konstruktion gerade so wie in §. 96, so ist dießmal nach §. 10, IV. KJ parallel NO, folglich nach Begriffen der ebenen Geometrie z. B. der Neigungswinkel ZKJ des Flächenwinkels GFC gleich dem Neigungswinkel ZNO des Flächenwinkels GMP; daher müssen auch die korrespondirenden Flächenwinkel GFC und GMP einander gleich sein (§. 90).

§. 98.

Lehrsatz. Fällt man von einem Punkte P (Fig. 39, 40 und 41), der zwischen den Schenkelebenen eines Flächenwinkels, (welche man sich hier senkrecht auf der Ebene des Papiers denken möge) liegt, auf diese zwei senkrechte Gerade PG und PH, so bestimmen letztere eine Ebene, auf der die Scheitellinie des gegebenen Flächenwinkels senkrecht steht und bilden mit einander einen (ebenen) Winkel GPH, welcher den Neigungswinkel des gegebenen Flächenwinkels zu 180° ergänzt.

Beweis. Die Ebene GPH steht senkrecht auf jeder der beiden Schenkelebenen (§. 55), somit auch senkrecht auf der Scheitellinie des Flächenwinkels (§. 59, II). Die Ebene GPH schneidet die beiden gegebenen Ebenen nach zwei Geraden JN und JM, welche senkrecht auf der Scheitellinie des Flächenwinkels stehen (§. 51, I); somit muß der (ebene) Winkel NJM den Neigungswinkel des gegebenen Flächenwinkels vorstellen. Zieht man in der Ebene PNJM die Gerade JP, so zerlegt diese den Neigungswinkel NJM in zwei Winkel PJN und PJM, von welchen entweder wie in Fig. 39 jeder spitz oder der eine z. B. PJN spitz und der andere PJM ein Rechter (Fig. 40) oder der eine z. B. PJN spitz und der andere PJM stumpf (Fig. 41) ist.

Im ersten Falle (Fig. 39) treffen die zu den Schenkelebenen des gegebenen Flächenwinkels senkrechten Geraden PG und PH die Schenkelebenen selbst und schließen mit den Schenkeln NJ und MJ des Neigungswinkels NJM ein Viereck PGJH ein, in welchem

die zwei Winkel PGJ und PHJ Rechte sind (§. 51, I). Da alle vier Winkel des Vierecks 360° ausmachen, so ist folglich GPH + GJH = 180° oder GPH + NJM = 180°.

Im zweiten Falle (Fig. 40) fällt die PH mit der PJ zusammen, die eine Senkrechte GP trifft die ihr zugehörige Schenkelebene selbst, die andere PJ trifft die Scheitellinie des gegebenen Flächenwinkels. Da PJM = 90° und

$$GPJ + PJG = 90°, \text{ so ist}$$
$$GPJ + \overline{PJG + PJM} = 180°, \text{ oder}$$
$$GPJ + NJM = 180°.$$

Im dritten Falle (Fig. 41), wo die eine PG der beiden Senkrechten die ihr zugehörige Schenkelebene selbst, die andere PH aber, indem sie die NJ in einem Punkte O schneidet, die Erweiterung der ihr zugehörigen Schenkelebene trifft, ist in den Dreiecken GOP und HOJ

Winkel GOP gleich Winkel HOJ
Winkel PGO gleich Winkel OHJ (= 90°)
folglich auch Winkel GPO gleich Winkel OJH
oder Winkel GPH gleich Winkel NJH
da aber NJH + NJM = 180°. so ist auch
GPH + NJM = 180°.

§. 99.

Erklärung. Fällt man von einem innerhalb eines Dreikants gelegenen Punkte senkrechte Gerade auf die drei Seitenebenen des Dreikants und legt durch je zwei dieser Senkrechten Ebenen, so entsteht ein neues Dreikant, dessen Seiten die Neigungswinkel der Flächenwinkel vom gegebenen beziehungsweise zu zwei Rechten ergänzen (§. 98). Die Kanten des gegebenen Dreikants stehen auch senkrecht auf den Seitenebenen des neuen (§. 98); also müssen auch die Seiten des alten Dreikants beziehungsweise die Neigungswinkel der Flächenwinkel vom neuen zu zwei Rechten ergänzen und es ist klar, daß man sich demnach das gegebene Dreikant ebenso aus dem neuen entstanden denken könnte, wie das neue aus dem alten.

Solche zwei Dreikante heißen Ergänzungskante zu einander.

Je zwei Ergänzungskanten ergänzen also beziehungsweise je die Seiten des einen die Neigungswinkel der Flächenwinkel vom andern zu 180°.

§. 100.

Lehrsatz. Ergänzungskante kongruenter oder symmetrischer Dreikante sind beziehlich selbst kongruent oder symmetrisch.

Beweis. Zwei kongruente oder symmetrische Dreikante haben beziehlich gleiche Flächenwinkel, also sind auch die Neigungswinkel dieser Flächenwinkel in beiden Dreikanten beziehlich gleich. Daher müssen beziehungsweise die Seiten der Ergänzungskante als Supplemente dieser gleichen Neigungswinkel gleich sein, woraus folgt, daß nach §. 49 die Ergänzungskante selbst kongruent oder symmetrisch sind.

§. 101.

Lehrsatz. Wenn in zwei Dreikanten die drei Flächenwinkel beziehlich gleich sind, so sind die Dreikante kongruent oder symmetrisch, je nachdem 2c. 2c.

Beweis. Da in den beiden Dreikanten beziehlich die drei Flächenwinkel gleich sind, so gehören je zu den gleichen derselben gleiche Neigungswinkel (§. 88). Denkt man sich zu jedem der beiden Dreikante ein Ergänzungskant, so haben diese Ergänzungskante beziehungsweise drei gleiche Seiten, weil die letztern beziehlich die Neigungswinkel von den Flächenwinkeln der gegebenen Dreikante suppliren; folglich sind die Ergänzungskante (§. 49) und somit auch die gegebenen Dreikante (§. 100) kongruent oder symmetrisch.

§. 102.

Lehrsatz. Wenn in zwei Dreikanten zwei Flächenwinkel und die Gegenseite des einen dieser Winkel beziehlich einander gleich sind, aber von den Gegenseiten, welche dem andern gleichen Winkel in beiden Dreikanten gegenüberliegen, die eine nicht gleich dem (Linien-) Nebenwinkel der andern ist, so sind die Dreikante kongruent oder symmetrisch, je nachdem 2c. 2c.

Der **Beweis** wird ähnlich dem des vorigen **Satzes** m Hülfe von §. 46 geführt.

§. 103.

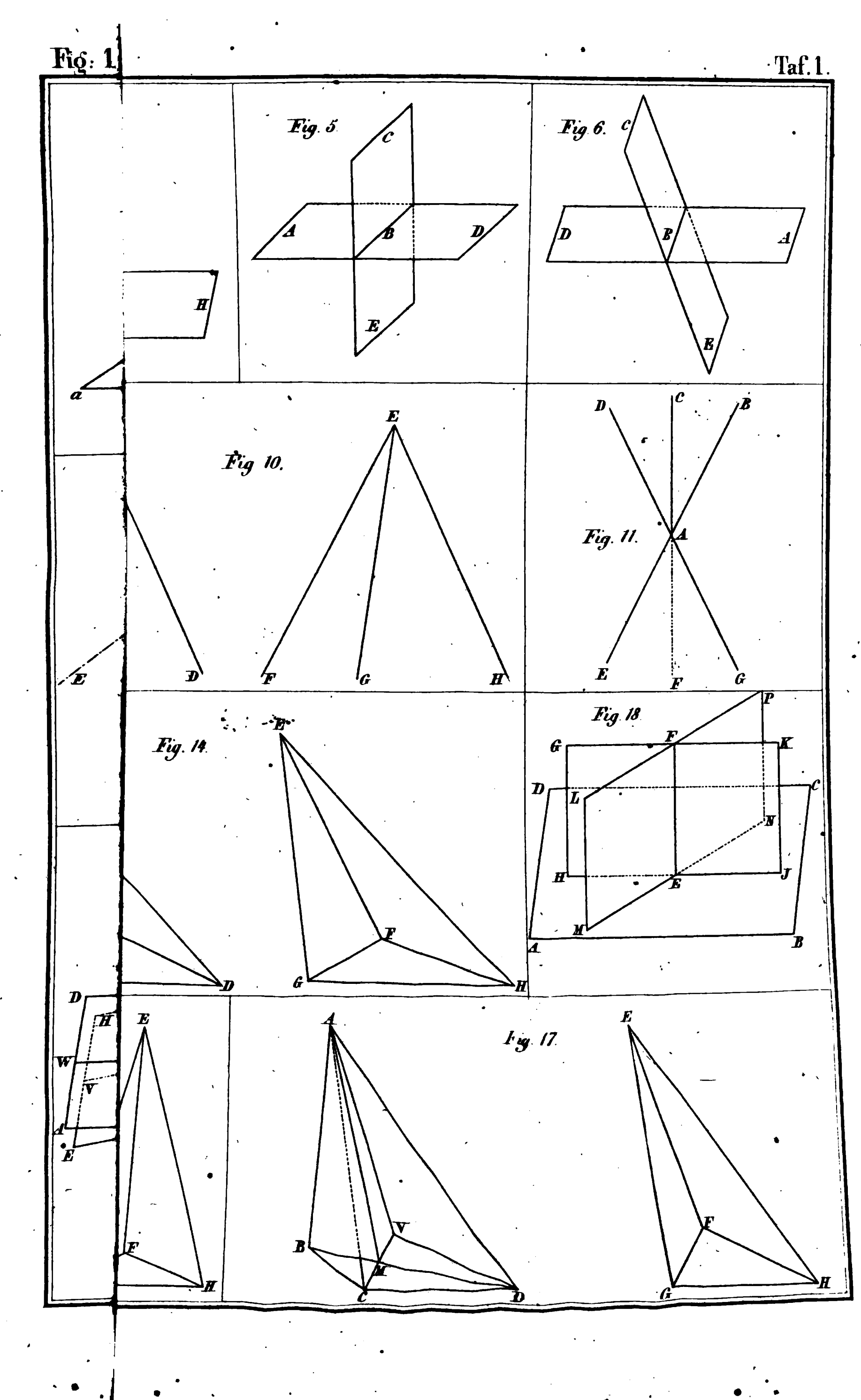
Lehrsatz. Flächenwinkel verhalten sich wie ihre **Neigungs**winkel.

Beweis. Läßt sich z. B. der eine Flächenwinkel *mittelst* durch seine Scheitellinie gehende Ebenen in m, der andere *mittelst* durch seine Scheitellinie gehende Ebenen in n Flächenwinkel zerlegen, welche m + n Theile alle unter sich gleich sind, d. h. verhält sich z. B. der erste Flächenwinkel zum zweiten wie m zu n so wird durch diese Ebenen der Neigungswinkel des ersten Flächenwinkels in m, der des zweiten in n ebene Winkel zerlegt, welche alle unter sich auch einander gleich sind (§§. 87 und 88), so daß sich demnach der Neigungswinkel des ersten Flächenwinkels zu dem des zweiten auch wie m zu n verhält und somit beide gegebene Flächenwinkel sich wie ihre Neigungswinkel verhalten.

§. 104.

Erklärung. Wird der rechte Flächenwinkel durch Ebenen, welche durch seine Scheitellinie gelegt sind, in 90 gleiche Flächenwinkel zerlegt, so heißt jeder von diesen letztern ein Raum-Grad. Ein solcher zerfällt in 60 Minuten, die Raum-Minute in 60 Secunden.

Aus den §§. 89 und 96 folgt, daß der Neigungswinkel eines Raum-Grads ein ebener Winkelgrad ist rc.; hieraus aber und aus §. 87 geht hervor, daß jeder Flächenwinkel so viel Raum-Grade rc. hat, als sein Neigungswinkel ebene Winkelgrade rc.


Fig: 1
Fig. 5
Fig 6.
Fig 10.
Fig. 11.
Fig. 14.
Fig 18
Fig. 17.



